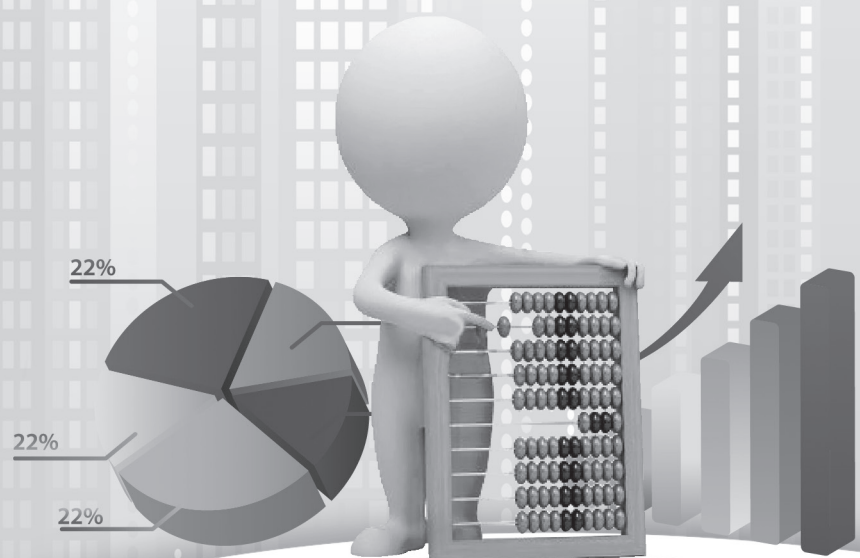


ARITMÉTICA



ARITMÉTICA

REGLA DEL TANTO POR CUANTO



Objetivos

- Reconoce y aplica el concepto de tanto por cuanto.
- Efectúa los descuentos y aumentos sucesivos.
- Plantea y resuelve problemas aplicando porcentajes en su vida cotidiana y en situaciones de índole comercial.

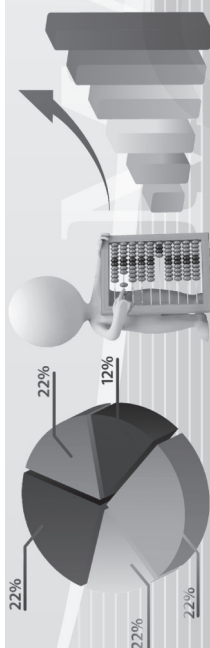


Sabías que...

El símbolo del %

El tanto por ciento se viene utilizando desde la época de los romanos, cuando el emperador Augusto estableció un impuesto de 1/100 sobre todos los bienes vendidos en subasta (*venalium centesima rerum*). Más adelante, en la Edad Media, se han encontrado manuscritos italianos en los que figuran expresiones tales como “20 p 100” y “XP cento” para indicar un 20 por ciento y 10 por ciento.

El signo de porcentaje (%) probablemente se ha visto por primera vez en un manuscrito anónimo italiano de 1425. En lugar de “por 100”, “P cento”, que eran comunes en aquella época, se utiliza ya este signo $\frac{\circ}{\circ}$ parcial al actual.





Helicoteoría

I. REGLA DEL TANTO POR CUANTO

A. Concepto

Es un procedimiento aritmético que nos permite determinar qué “tanto” (parte) representa una cantidad con respecto a un todo “cuanto”.

Ejemplo

En cierta panadería, por cada 20 panes que se compra obsequian 3. Si compro 80 panes, ¿cuántos me regalan?

Resolución

Obsequian 3 por cada 20 $\leftrightarrow$ el 3 por 20

$$\rightarrow \text{El } \underbrace{3 \text{ por } 20}_{\frac{3}{20}} \text{ de } \underbrace{80}_{\times 80} = 12$$

En general

$$\text{El } \underbrace{a}_{\text{tanto}} \text{ por } \underbrace{b}_{\text{cuanto}} \text{ de } N : \frac{a}{b} \times N$$

Ejercicios

- El 4 por 7 de 63: _____
- El 3 por 4 de los $\frac{2}{5}$ de 720: _____

B. Casos particulares del tanto por cuanto

- Tanto por ciento (%)
 $\rightarrow a \text{ por ciento: } a\% \leftrightarrow \frac{a}{100}$
- Tanto por mil ‰
 $\rightarrow b \text{ por mil: } b\text{‰} \leftrightarrow \frac{b}{1000}$
- Tanto por millón (ppm)
 $\rightarrow c \text{ por millón: } c \text{ ppm} \leftrightarrow \frac{c}{1000000}$

El uso más habitual de ppm es en análisis químico para las medidas de concentraciones muy diluidas.

II. REGLA DEL TANTO POR CIENTO

La idea consiste en dividir una cantidad en 100 partes iguales y luego tomar de ellas tantas partes como se indique.

$$a \text{ por ciento: } a\% \leftrightarrow \frac{a}{100}$$

Ejemplos

- 20 por ciento: $20\% \leftrightarrow \frac{20}{100}$
- 150 por ciento: $150\% \leftrightarrow \frac{150}{100}$
- 400 por ciento: $400\% \leftrightarrow \frac{400}{100}$



Observación

$$\left(\begin{array}{c} \text{Tanto por} \\ \text{ciento} \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Fracción} \\ \text{o entero} \end{array} \right)$$

Ejemplo

$$\text{El } \underbrace{20\%}_{20\%} \text{ de } \underbrace{300}_{\downarrow} \text{ es } \underbrace{\times}_{\times} \frac{20}{100} \times 300 = 60$$

En general

$$\text{El } a\% \text{ de } N : a\% N = \frac{a}{100} \times N$$

A. Equivalencias

1. De tanto por ciento a fracción o entero
 - $10\% \leftrightarrow \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ (Décima parte)
 - $20\% \leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ (Quinta parte)
 - $25\% \leftrightarrow \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ (Cuarta parte)
 - $50\% \leftrightarrow \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ (La mitad)
 - $100\% \leftrightarrow \frac{100}{100} = 1$ (Total)



Anotación

Toda cantidad representa el 100 % de sí misma.

$$N = 100\% N$$

2. Porcentaje

$$\frac{1}{4} \leftrightarrow \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$$

$$\frac{7}{20} \leftrightarrow \frac{7}{20} \times 100\% = 35\%$$

- ¿Qué tanto por ciento es 6 de 15?

- ¿De qué número, 36 es su 80 %?

Parte de un total como tanto por ciento

En general

$$\underbrace{\text{¿Qué tanto por ciento de } a \text{ es } b?}_{\frac{x}{100}} \times \text{Todo} = \text{Parte}$$

$$\left(\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \right) \times 100 \% = \frac{b}{a} \times 100 \%$$



Observación

Nótese que el total a es la cantidad que está precedida de la palabra de.

Ejercicio

En un aula hay 24 varones y 16 mujeres. Indique

- ¿qué tanto por ciento son los varones del total?
- ¿qué tanto por ciento son las mujeres?
- ¿qué tanto por ciento son las mujeres de los varones?

B. Operaciones con el tanto por ciento

Aplicados sobre una misma cantidad

1. Adición

$$20 \% A + 30 \% A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$120 \% B + 45 \% B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$N + 30 \% N = \underline{\hspace{2cm}}$$

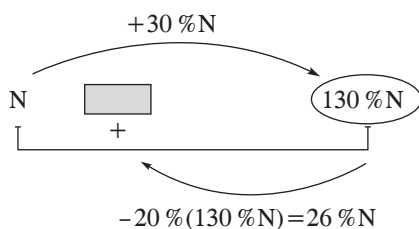
2. Sustracción

$$40 \% A - 10 \% A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$N - 25 \% N = \underline{\hspace{2cm}}$$

C. Aumentos y descuentos sucesivos

Si a una cantidad se le aumenta el 30 % y luego de la nueva cantidad se le disminuye su 20 %, entonces se obtiene



$$\text{Luego: } 130 \% N - 26 \% N = 104 \% N$$

Respuesta: 104 % de la cantidad inicial.

Forma practica

Cantidad inicial: N

Luego del aumento y descuento: 30 % y 20 %

$$\text{Queda: } N \times 130 \% \times 80 \% = 104 \% N$$

Respuesta: 104 %

Ejercicios

- Un artículo se ofrecía en una tienda en S/P. Si el vendedor realiza dos descuentos sucesivos del 20 % y 10 %, calcule el descuento único equivalente a estos dos descuentos sucesivos.

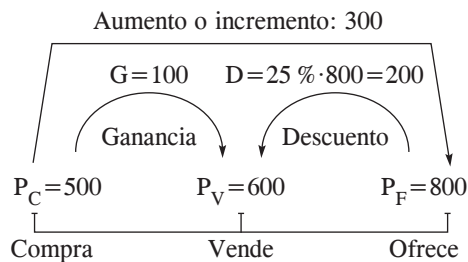
- Calcule el aumento único equivalente a tres aumentos sucesivos del 50 %, 20 % y 25 %.

D. Aplicaciones comerciales

- **Precio de costo (P_C).** Es lo que el comerciante invierte en la adquisición de una mercadería para luego venderla.
- **Precio de venta (P_V).** Es lo que el cliente paga al comerciante por la compra de la mercadería.
- **Precio fijado (P_F).** Es el valor que pide el comerciante por la mercadería que ofrece.
- **Ganancia (G).** Es la diferencia que se obtiene cuando el precio de venta es mayor que el precio de costo.
- **Pérdida (P).** Es la diferencia que resulta cuando la mercadería se vende a un precio menor del costo.
- **Descuento (D).** Es la rebaja que obtiene el cliente al comprar la mercadería a un precio menor que el precio fijado.

Ejemplo

El comerciante Diego Casas adquiere máquinas de videojuegos al por mayor en una fábrica, al verificar el costo de una PS4 sería \$500; él lleva a su tienda las máquinas y ofrece una PS4 en \$800, pero al momento de la venta realiza un descuento del 25 %. ¿Cuánto ganó dicho comerciante en la venta de la PS4?

Resolución

Respuesta: Ganó \$100.

Se observa

$$P_C + G = P_V$$

$$P_F - D = P_V$$

$$P_C + (\text{incremento}) = P_F$$

P_V : precio de venta

P_C : precio de costo

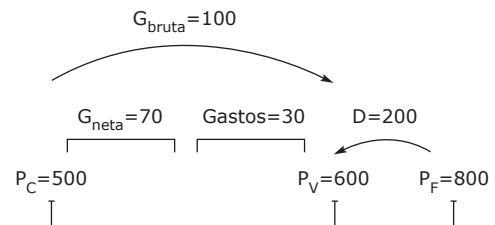
P_F : precio fijado o precio de lista

Observación

1. Cuando se mencionen gastos o impuestos.

Ejemplo

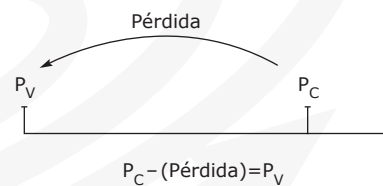
Si en la aplicación planteada mencionaban gastos de \$30 por mantenimiento, entonces



La ganancia líquida sería de \$70 y ya no \$100.

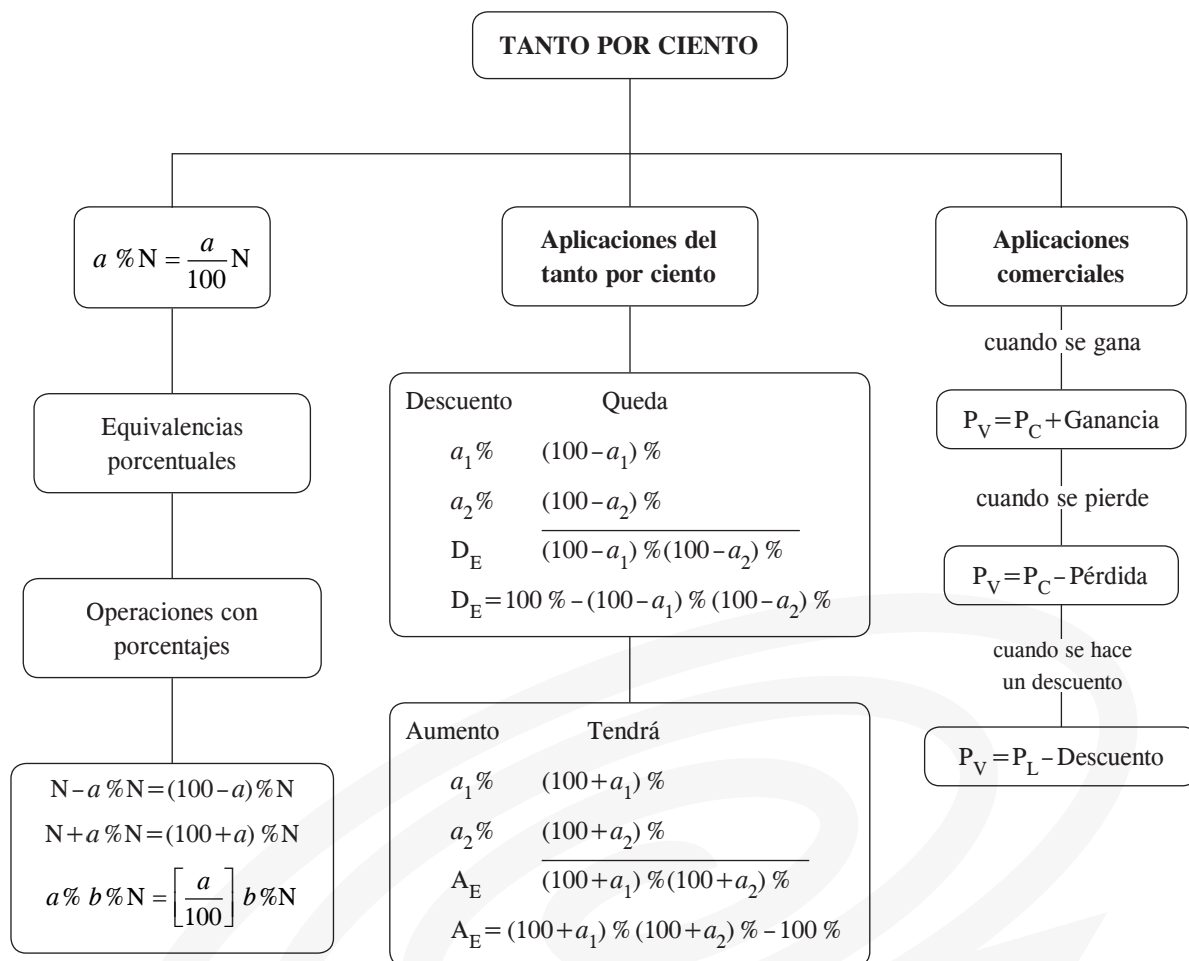
$$G_{neta} + (\text{Gastos}) = G_{bruta}$$

2. Cuando la ganancia, pérdida o incremento se expresen en tanto por ciento y no se mencione respecto de quién, se debe considerar que es respecto del precio de costo.
3. Cuando el descuento se exprese en tanto por ciento y no se mencione respecto de quién, se debe considerar que es respecto del precio de lista.
4. En casos de pérdida ($P_V < P_C$)





Helicósinthesis

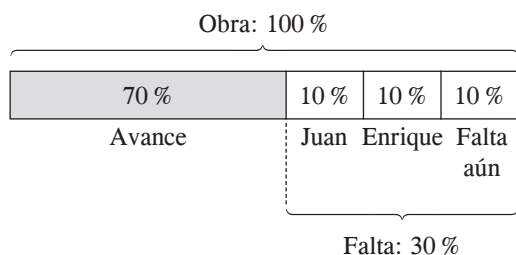


Problemas resueltos

- Juan y Enrique deben concluir un trabajo del cual tienen un avance del 70 %, pero Juan manifiesta que, por estar cansado, en ese día solo podrá realizar un tercio de lo que falta. Al finalizar el día Enrique observa que aún falta realizar un 10 % del trabajo. ¿Qué porcentaje del trabajo avanzó Enrique en ese día?

Resolución

De los datos



De la gráfica, se observa que en ese día Enrique avanzó el 10 % del trabajo.

Rpta.: 10 %

- Una tienda vende celulares modelo UNI-2Z a razón de \$210 cada uno. Se hace una oferta: “Por la compra de dos celulares se realizará un descuento del 20 %”. Un cliente accedió a dicha oferta y pagó con 250 euros, determine el vuelto que recibió en nuevos soles. Tipo de cambio: 1 € = \$1,5 = S/4,20

Resolución

Se pide el vuelto que recibió en soles.

Datos:

Costo de dos celulares: \$420

Descuento = 20 % → Paga = 80 %

Pagó con 250 €

80 % (\$ 420)	Vuelto (v)
---------------	------------

Entonces

$$80 \% (\$ 420) + v = 250 \text{ €}$$

$$v = € 250 - 80 \% (\$ 420)$$

$$v = € 250 - \$ 336 \quad (I)$$

Teniendo en cuenta el tipo de cambio

$$€ 1 = S / 4,20 \text{ y}$$

$$\$ 1 = \frac{2}{3} (S / 4,20)$$

Reemplazando en (I), se obtiene

$$v = S / 109,20$$

Rpta.: S / 109,20

3. El cine Ecran consigna la siguiente tabla que contiene la cantidad de personas que han asistido la primera semana de abril.

L	M	M	J	V	S	D
220	394	280	a	500	b	987

¿Qué porcentaje representa el promedio de asistentes respecto del total de asistentes?

Resolución

De la tabla tenemos

$$\text{Total de asistentes} = \frac{L}{220} + \frac{M}{394} + \frac{M}{280} + \frac{J}{a} + \frac{V}{500} + \frac{S}{b} + \frac{D}{987} = S$$

$$\text{Promedio} = \frac{\text{Total}}{\text{N.º de días}} = \frac{S}{7}$$

Piden

$$\frac{\text{Promedio}}{\text{Total de asistentes}} \times 100 \% = \frac{\frac{S}{7}}{S} \times 100 \% = \frac{100}{7} \% = 14,28 \%$$

Rpta.: 14,28 %

4. Si el 10 % $m=20\%$ n y el 20 % $n=30\%$ t , entonces el 100 % de m es igual a $x\%$ de t . Indique el valor de x .

ResoluciónNos piden x en la igualdad

$$100 \% m = x \% t \quad \dots (1)$$

Datos

$$10 \% m = 20 \% n \text{ y } 20 \% n = 30 \% t$$

Iguales

$$\times 10 \left(\begin{array}{l} 10 \% m = 30 \% t \\ 100 \% m = 300 \% t \end{array} \right) \quad \dots (2)$$

Comparando (1) con (2)

$$\therefore x = 300$$

Rpta.: 300

5. Una tienda vende un producto haciendo descuentos primero uno de 15 % y luego otro de 15 %. Una segunda tienda, que tiene el mismo producto y al mismo precio de lista, realiza un descuento del 30 %. ¿Cuánto de descuento (en %) o de incremento (en %) debe efectuar la segunda tienda para que en ambas tiendas el producto tenga el mismo precio final? La respuesta aproximada es

Resolución➤ Sea el precio del producto: P

1.ª tienda

Dos descuentos sucesivos del 15 % y 15 %.

$$\text{➤ } P_{F1} = 85 \% \times 85 \% P = \frac{289}{400} P$$

2.ª tienda

Un descuento único del 30 %.

$$\text{➤ } P_{F2} = 70 \% P = \frac{7}{10} P = \frac{280}{400} P$$

Como $P_{F2} < P_{F1}$, entonces debe incrementarse en la 2.ª tienda para que ambas tiendas tengan el mismo precio final.

$$\text{➤ } P_{F2} = \frac{280}{400} P$$

$$\text{El incremento sería: } P_{F1} - P_{F2} = \frac{9}{400} P$$

$$x \% \left(\frac{280 P}{400} \right) = \frac{9 P}{400}$$

$$x \% = 3,2 \%$$

Rpta.: incrementa 3,2 %.



Helicopráctica

Nivel I

1. Se sabe que el 120 % de $(2x+n)$ es igual al 80 % de $(x+2n)$. ¿Qué porcentaje de n es x ?

Resolución

3. Una tela al lavarse se encoge el 10 % en el ancho y el 20 % en el largo. Si se sabe que la tela tiene 2 metros de ancho, ¿qué longitud debe comprarse si se necesitan 36 metros de tela después de lavada?

Resolución

2. De los animales de una granja el 30 % del total son patos, el 20 % son gallinas y el 50 % pavos. Si el número de pavos fuera el doble, ¿qué porcentaje del total serían patos?

Resolución

4. Un artículo se vendió a S/690 con una ganancia del 15% del costo más el 20% del precio de venta. ¿Cuál fue el precio de costo de ese artículo?

Resolución

Nivel II

5. En una reunión social, se observa que el número de varones que baila es el 60% del total de mujeres. Además, la cantidad de mujeres que no bailan es el 25% del total de varones. ¿Qué tanto por ciento es el número de mujeres con respecto al número de varones?

Resolución

7. El ancho de un rectángulo disminuye sucesivamente en 20 % y 20 %, además su largo aumenta sucesivamente en 20 % y 20 %. ¿En qué tanto por ciento varía su área?

Resolución

6. Se tienen dos recipientes que contienen cantidades diferentes de agua. Si del primero se extrae una cantidad de agua igual al 20% de lo que no se extrae y del segundo se extrae un 25% de lo que no se extrae y se vierten en otro recipiente, obteniéndose así volúmenes iguales de agua; ¿inicialmente qué tanto por ciento del segundo recipiente era el volumen del primer recipiente?

Resolución

8. Al precio de compra de una mercadería se le hace tres aumentos sucesivos del 60 %, 25 % y 20 %; posteriormente se le hace tres descuentos del 25 %, 20 % y 20 %; obteniéndose de este modo el precio de venta. Si la ganancia es de S/608, calcule la suma de las cifras del precio de costo.

Resolución

Nivel III

9. Para vender un equipo de sonido, un comerciante incrementa su precio en un $66,6\%$ y el descuento realizado es la mitad de su ganancia. Si el equipo de sonido se vendió a S/650 y los gastos representan el 25% de su ganancia bruta, ¿cuál fue su ganancia neta?

Resolución

11. Un comerciante tiene tres televisores de 20 pulgadas de distintas marcas, vende 2 de ellos en S/1080 cada uno, ganando en uno de ellos el 15 por 75 y perdiendo en el otro el 20 por 70. Si el tercer televisor le costó S/630, ¿qué tanto por ciento debe ganar en este último para que en el total de la venta no se gane ni se pierda?

Resolución

10. En un pueblo se realizan censos poblacionales cada año. Si la población aumentó en 10% el primer año; en 20% el segundo año y el siguiente año en 40%. Al finalizar el tercer año, la población es de 9240 personas. ¿Cuántas personas había al inicio del primer censo?

Resolución

12. Un comerciante compró sacos de arroz y los vendió perdiendo 50% del costo; con el dinero obtenido compró sacos de azúcar que luego los vendió ganando el $b\%$ del costo, y con el dinero de esta venta compró frijoles, vendiéndolos y perdiendo el 50% de su costo. Si por último con el dinero que recibe compra nuevamente arroz que lo vende ganando el $b\%$ del costo; halle el valor de b sabiendo que la última ganancia en dinero, es igual a la primera pérdida.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. ¿Qué porcentaje de un número que tiene por 20 % al 40 % de 60 es el 72 % de otro número que tiene por 40 % al 60 % de 20?

Resolución

3. Si las aristas de un cubo aumentan en 25 %, ¿en qué tanto por ciento varía su volumen?

Resolución

Nivel II

2. En una granja de aves, el 40 % es de gallinas. Si se ha vendido el 20 % de gallinas, ¿en qué porcentaje ha disminuido el número de aves?

Resolución

4. Del contenido de una botella llena de vino se extrae el 20 %, luego se devuelve el 25 % de lo que no se devuelve. Luego de esto, ¿qué porcentaje del recipiente estará vacío?

Resolución

5. Una señora compra 2750 huevos por 1000 soles, pero se le rompen 350 y vende lo restante a 7 soles la docena. ¿Cuál es el porcentaje de ganancia?

Resolución

Nivel III

7. María Sandra vende pescado ganando el 30% de su costo entre las 5 a. m. y las 8 a. m., el 10% entre las 8 y las 10 y perdiendo el 15% a partir de este lapso. Si en un día ganó el 5% de lo invertido y sabiendo que vendió el 40% de su mercancía antes de las 8 a. m., ¿qué porcentaje de lo comprado lo tuvo que vender a pérdida?

Resolución

6. Se desea exportar motores cuyo precio de lista es \$120 000 dólares, al venderlos se consigue dos descuentos sucesivos del 10% y 15%, ganando aún el 20%. ¿Cuánto es el precio de costo en dólares?

Resolución

8. Al fijar el precio de un artículo, un vendedor decidió incrementar en 25% su costo, otorgando un descuento del 10%. Si el estado cobra al vendedor el 18% del precio de venta por impuestos, ¿qué tanto por ciento del costo gana o pierde?

Resolución



Test 1

Nivel I

- En un salón de clases, el 40% de los alumnos son hombres. Si falta el 25% de las mujeres y solo asisten 27 mujeres, ¿cuál es el total de alumnos del salón?
A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 100
- Un comerciante vendió el 40% de su mercancía y perdió el 40%. ¿Qué tanto por ciento debe ganar en la venta del resto para recuperar su capital?
A) 40% B) 33,3% C) 25%
D) 20% E) 26,6%

Nivel II

- Se tienen dos barriles de vino, el volumen de uno de ellos es el 60% del otro. Si de ambos se consumen el 30% y 48%, respectivamente, por lo que ahora uno de ellos tiene 45 litros más que el otro, ¿cuántos litros se consumió del primero?

- A) 8 B) 72 C) 81
D) 90 E) 96

- Al sueldo de un docente se le hace un primer aumento del 30% en enero y en el mes de junio un aumento del 10% sobre el sueldo de mayo. ¿Qué porcentaje adicional del sueldo del año anterior recibirá en agosto?
A) 43% B) 27% C) 42%
D) 20% E) 70%

Nivel III

- Un comerciante compra cierta cantidad de polos y decide vender el 25%, luego vende el 33,3% del resto y al final le compran el 50% de los que le quedaba. Si al final vendió lo que sobraba en S/250 y ganó en ello S/100, ¿cuál es el costo total de los polos?
A) S/300 B) S/400 C) S/500
D) S/600 E) S/650



Test 2

Nivel I

- ¿Qué porcentaje del 20% del 30% de 600, es lo que le falta al 10% de 40 para ser igual al 40% del 50% de 200?
A) 100% B) 80% C) 12%
D) 84% E) 90%
- Si gastara el 20% del dinero que tengo y luego ganara el 10% de lo que me queda, tendría 36 soles menos. ¿Cuántos soles tengo?
A) 200 B) 400 C) 100
D) 300 E) 250

Nivel II

- De un recipiente lleno de vino, se extrae el 25% de lo que no se extrae. ¿Qué tanto por ciento estará lleno el recipiente si se agrega el 30% de lo que faltaba por llenar?
A) 40% B) 43% C) 60%
D) 86% E) 80%

- A un obrero se le aumenta el sueldo de la siguiente forma:
➤ 12% sobre el 20% de su sueldo
➤ 15% sobre el 40% del resto y
➤ 20% sobre los 2400 restantes
¿Cuál es su nuevo sueldo?

- A) S/5820 B) S/5840 C) S/5240
D) S/4940 E) S/5790

Nivel III

- El precio de un libro es S/240. Paola desea comprarlo, para lo cual pide un descuento. El hijo, del dueño le hace un descuento del 10%, luego el dueño le rebaja S/16. Determine cuánto dinero tenía Paola si su padre le ayudó con S/60, pudiendo así comprar el libro.
A) S/100 B) S/120 C) S/140
D) S/150 E) S/160



Helicodesafío

1. Cuando el largo del rectángulo aumenta en 10% y el ancho disminuye en un 10%, el área del rectángulo disminuye en 80 m^2 . ¿Cuál era el área del rectángulo inicial?

A) 800 m^2 B) 8000 m^2
 C) 400 m^2 D) El área no varía
 E) 4000 m^2
2. Para fijar el precio de un artículo un comerciante eleva el precio de sus productos en un determinado porcentaje. Pero al venderlo hace dos descuentos sucesivos del 20% y 20% y un posterior aumento del 20% con lo cual todavía gana el 20% del precio de venta. Determine el precio fijado inicialmente para la venta al público.

A) $S/12\,000$ B) $S/27\,000$ C) $S/13\,000$
 D) $S/12\,500$ E) $S/21\,000$
3. Un comerciante compra mercaderías con un descuento del 20% del precio de lista. Desea ponerles un precio de tal manera que puedan dar dos descuentos sucesivos del 20% y del 20% y obtener una ganancia del 25% del precio de venta. ¿Qué porcentaje del precio de lista debe fijar para las mercaderías?

A) 150 % B) $166\frac{2}{3}\%$ C) $145\frac{1}{2}\%$
 D) $148\frac{2}{3}\%$ E) 165 %
4. Marisol desea ir de una ciudad A a otra B distante a 560 km. Cuando había recorrido el 40% de lo que le faltaba recorrer observa que si recorre M km más, lo que le faltaría por recorrer sería el 180% de lo que ha recorrido realmente. Halle el valor de M.

A) 315 B) 214 C) 112
 D) 520 E) 340
5. El precio de compra de un producto es S/x . ¿Cuánto deber ser el precio de venta incluido el IGV para ganar el y% del precio de venta?
 (Considere IGV como 18 %).

A) $\frac{100 - y}{118}$ soles B) $(1 + 0,01y)x$ soles
 C) $\frac{118y}{100 - x}$ soles D) $\frac{(1 + 0,18)x}{y - 100}$ soles
 E) $\frac{118x}{100 - y}$ soles

PROMEDIOS



Objetivos

- Recopila y analiza datos en forma ordenada y determina el representante más adecuado (promedios).
- Utiliza los promedios en el estudio de una situación particular y aplica las propiedades de los promedios estudiados en la resolución de problemas concretos.



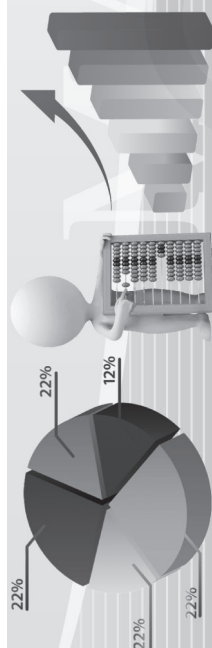
Sabías que...

La palabra “promedio” es tan antigua como el principio de contar, pero los frecuentes abusos en su utilización nos han conducido a una verdadera crisis en el manejo de la estadística, hasta el punto de pensar que un “mal promedio” puede convertirse en un “buen promedio” o viceversa, mediante argucias matemáticas o estadísticas.

El concepto de promedio está asociado al lenguaje cotidiano de las personas, y a la toma de decisiones en todos los campos de la actividad humana. Como tal, debe dársele una utilización apropiada, para que sus resultados se conviertan en una verdad incuestionable y unificada para quienes los calculan e interpretan.

Cuando decimos “aproximadamente” o “más o menos” no estamos refiriendo de manera general a un promedio subjetivo que tiene como fundamento la información histórica o la experiencia de cada individuo, pero que nada tiene que ver con los métodos formales de la estadística. En el lenguaje de la empresa, no puede hacerse lo mismo, sino que es necesario utilizar promedios objetivos con base en una correcta recolección, tabulación y análisis de la información.

Las ideas que se describen a continuación tienen como objetivo el mejoramiento en la calidad de los promedios, para los lectores que hacen uso frecuente de ellos.





PROMEDIO

Se denomina *promedio* o *media* a aquel valor representativo de un conjunto de datos. El promedio es un valor que está comprendido siempre entre el menor y el mayor de los datos.

ESTUDIO DE ALGUNOS PROMEDIOS

Estudiaremos los siguientes promedios:

1. Promedio aritmético o media aritmética (MA)

Se calcula así:

$$MA = \frac{\text{Suma de datos}}{\text{Cantidad de datos}}$$

Ejemplos

$$MA(12; 18) = \frac{12 + 18}{2} = 15$$

$$MA(a; b) = \frac{a + b}{2}$$

$$MA(24; 6; 12) = \frac{24 + 6 + 12}{3} = 14$$

$$MA(a; b; c) = \frac{a + b + c}{3}$$

$$MA(12; 12; 12; 12) = \frac{12 + 12 + 12 + 12}{4} = 12$$

$$MA(17; 11; 26; 33; 9; 12) = \frac{17 + 11 + 26 + 33 + 9 + 12}{6} = 18$$



Anotación

Cuando se diga promedio, se asumirá un promedio aritmético.

Consideraciones

- Si a cada dato se le suma (o resta) una constante, su MA aumentará (o disminuirá) en dicha constante.
- Si a cada dato se le multiplica por una constante diferente de cero, su MA se multiplicará por dicha constante.
- Si se tiene una progresión aritmética:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow \\ & +r & & & +r \end{array}$$

$$\text{Entonces: } MA(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n) = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

La MA se puede calcular como la semisuma de cualquier pareja de términos equidistantes de los extremos. Si la cantidad de términos es impar, la MA será el término central.

2. Promedio geométrico o media geométrica (MG)

Se calcula así:

$$MG = \sqrt[n]{\text{Producto de datos}}$$

Ejemplos

$$MG(12; 18) = \sqrt{12 \times 18} = 14,69$$

$$MG(a, b) = \sqrt{a \times b}$$

$$MG(24; 6; 12) = \sqrt[3]{24 \times 6 \times 12} = 12$$

$$MG(a, b, c) = \sqrt[3]{a \times b \times c}$$

$$MG(12; 12; 12; 12) = \sqrt[4]{12 \times 12 \times 12 \times 12} = 12$$

$$MG(3; 5; 8; 3; 5; 2) = \sqrt[6]{3 \times 5 \times 8 \times 3 \times 5 \times 2} = 3,915$$



Anotación

El cálculo de la MG está limitado para valores positivos.

Consideraciones

Si se tiene una progresión geométrica

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow \\ & \times q & & & \times q \end{array}$$

$$\text{Entonces: } MG(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n) = \sqrt[n]{a_1 \times a_n}$$

La MG se puede calcular como la raíz cuadrada del producto de cualquier pareja de términos equidistantes de los extremos. Si la cantidad de términos es impar, la MG será el término central.

3. Promedio armónico o media armónica (MH)

Se calcula así:

$$MH = \frac{\text{Cantidad de datos}}{\text{suma de las inversas de los datos}}$$

Ejemplos

$$MH(12; 18) = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = 14,4$$

$$MH(a; b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2 \times a \times b}{a + b}$$

$$MH(24; 6; 12) = \frac{3}{\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = 10,28$$

$$MH(a; b; c) = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{3 \times a \times b \times c}{a \times b + b \times c + a \times c}$$

$$MH(12; 12; 12; 12) = \frac{4}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}} = 12$$

$$MH(3; 4; 6; 8) = \frac{4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = 4,57$$

**Anotación**

La MH no está definida, si alguno de los valores es cero.

PROPIEDADES

Para la MA, MG y MH se cumple:

1. Para datos no todos iguales, se cumple

$$MA > MG > MH$$

2. Para datos todos iguales, se cumple

$$MA = MG = MH$$

3. Solo para dos datos a y b , se cumple

$$(MA)(MH) = MG^2$$

$$(a-b)^2 = 4(MA+MG)(MA-MG)$$

PROMEDIO ARITMÉTICO PONDERADO

El promedio ponderado permite calcular un promedio que toma en cuenta la importancia o el peso que tiene cada valor sobre el total.

Ejemplo

Las notas de un alumno en la universidad fueron

	Nota	Peso
Matemática I	12	5
Física I	11	5
Química I	14	5
Economía	15	2
Inglés	19	1

Calcule cuál fue su promedio ponderado.

Resolución

$$\text{Promedio ponderado} = \frac{12 \times 5 + 11 \times 5 + 14 \times 5 + 15 \times 2 + 19 \times 1}{5 + 5 + 5 + 2 + 1}$$

$$\text{Promedio ponderado} = \frac{234}{18} = 13$$

En general

Datos: $x_1, x_2, \dots, x_n$ Pesos: $w_1, w_2, \dots, w_n$

$$\text{Promedio ponderado} = \frac{x_1 \times w_1 + x_2 \times w_2 + \dots + x_n \times w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

**Anotación**

En las universidades, cada curso que se estudia tiene una determinada cantidad de créditos (peso) y esta depende del número de horas que se dicta, el grado de dificultad y la importancia dentro de la carrera. Debido a esto, el promedio que utilizan al final de un semestre académico es el promedio ponderado.

VARIACIÓN DE LA MA

Cuando de un conjunto de datos algunos aumentan o disminuyen su valor, entonces la MA de este conjunto de datos se verá alterada y dicha variación se calcula de la siguiente manera.

$$\text{variación de la MA} = \Delta MA = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{cantidad} \\ \text{total que se} \\ \text{aumenta} \\ \text{a los datos} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{cantidad} \\ \text{total que se} \\ \text{disminuye} \\ \text{a los datos} \end{array} \right)}{\text{cantidad de datos}}$$

Además

$$MA_{\text{final}} = MA_{\text{inicial}} + \text{variación de la MA}$$

Ejemplo

El promedio de 10 números es 15. Si a 4 de estos números les quitamos 8 unidades, cada uno, y a 3 de ellos les aumentamos 2 unidades, cada uno, ¿cuál es el nuevo promedio?

*Resolución*MA inicial = 15, aplicamos el cálculo de ΔMA .

$$\Delta MA = \frac{3(2) - 4(8)}{10} = -2,6 \quad \text{El promedio disminuye}$$

Finalmente

$$MA_{\text{final}} = 15 - (2,6) = 12,4$$

Por lo tanto, el nuevo promedio es 12,4.

¡Cuidado!

Se utiliza ΔMA cuando la cantidad total de datos no se altera, pues tan solo los datos aumentan o disminuyen su valor.

Anotación

Al calcular la ΔMA , el resultado puede ser positivo; cero o negativo. En el caso de que sea positivo, el promedio aumenta; en caso resulte negativo, el promedio disminuye, y si resulta cero, el promedio no cambia.

VELOCIDAD PROMEDIO

La velocidad media o velocidad promedio es la que tiene un móvil en un intervalo de tiempo dado.

$$v_p = \frac{\text{Espacio total recorrido}}{\text{Tiempo total empleado}}$$

Ejemplo

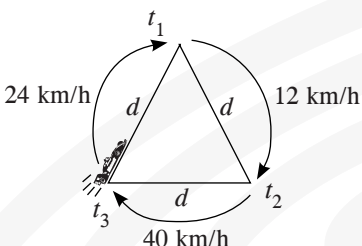
Un auto recorre los lados de un triángulo equilátero con velocidades de 24 km/h; 12 km/h y 40 km/h por cada lado. Determine la velocidad promedio del auto.

Resolución

De los datos del problema, tenemos

$$v_p = \frac{d+d+d}{t_1+t_2+t_3}$$

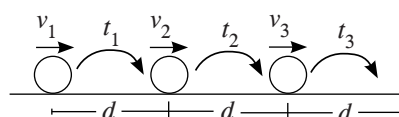
$$v_p = \frac{3d}{\frac{d}{24} + \frac{d}{12} + \frac{d}{40}}$$

$$v_p = \frac{3d}{\frac{18d}{120}} = \frac{360}{18} = 20 \text{ km/h}$$


Por lo tanto, la velocidad promedio del auto es 20 km/h.

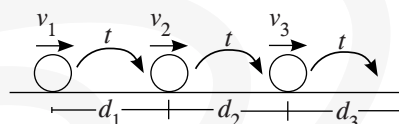
Anotación

Si un móvil recorre tramos iguales con diferentes velocidades, la velocidad promedio será la MH de las velocidades.

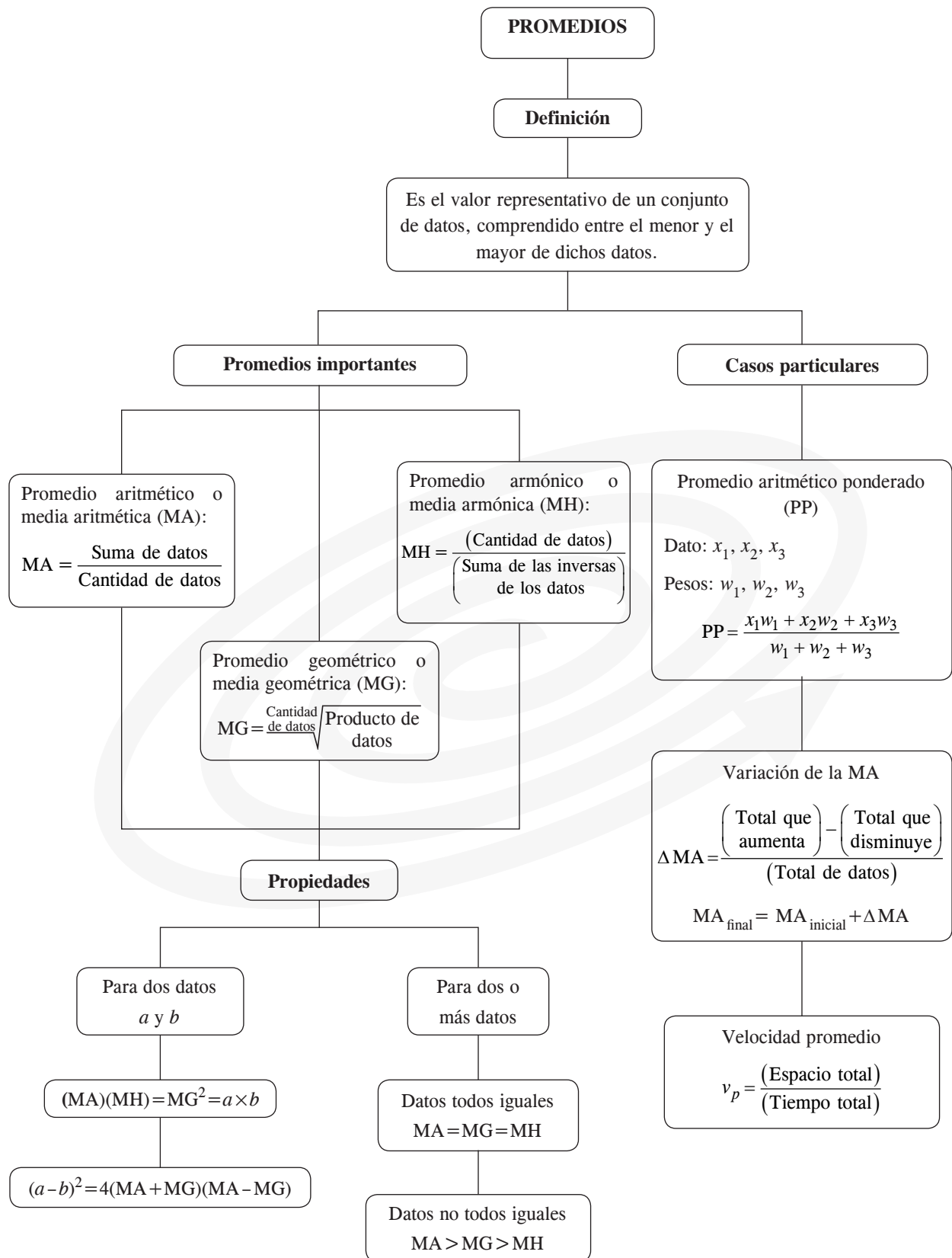


$$v_p = MH(v_1; v_2; v_3)$$

Si un móvil recorre en tiempos iguales ciertos tramos con velocidades diferentes, la velocidad promedio será la MA de dichas velocidades.



$$v_p = MA(v_1; v_2; v_3)$$





Problemas resueltos

1. Las notas obtenidas por tres postulantes hacen un promedio de 15. La relación entre las notas del primero y el segundo es $\frac{4}{5}$ y la relación entre el segundo y el tercero es $\frac{5}{6}$. Calcule la diferencia entre la mayor y menor nota. (UNI 2014-I)

Resolución

Sean las notas a , b y c , donde

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \\ \frac{b}{c} = \frac{5}{6} \end{array} \right\} \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$$

$$\text{Nota promedio} = 15 = \frac{a+b+c}{3} = \frac{4k+5k+6k}{3}$$

$$15 = 5k \rightarrow k = 3$$

$$\rightarrow a = 12, b = 15, c = 18$$

$$\therefore c - a = 18 - 12 = 6$$

Rpta.: 6

2. En un supermercado donde el sueldo promedio es de S/600 se incrementa el personal en 25 % del ya existente, ingresando el nuevo personal con un sueldo promedio igual al 60 % de los antiguos. Si 3 meses más tarde se incrementa cada sueldo en 20 %, más S/30; ¿cuánto es el nuevo sueldo promedio de todo el personal? (UNI 2011-I)

Resolución

Del enunciado

	Número de personas	Sueldo promedio
Personal antiguo	$4n$	S/600
Personal nuevo	n	S/360 $\rightarrow 60\%(600)$

$$\text{Sueldo promedio} = \frac{(4n)(600) + (n)(360)}{4n + n} = \frac{2760n}{5n} = \text{S/552}$$

Luego de 3 meses se incrementa cada sueldo en 20 %, más S/30.

$\therefore$ Sueldo promedio del personal

$$120\%(552) + 30 = \text{S/692,40}$$

Rpta.: S/692,40

3. Un comerciante tiene que formar, paquetes diferentes de 8 unidades de frutos, para ello debe escoger entre plátanos y peras. Cada plátano cuesta S/0,20 y cada pera S/0,50. ¿Cuál es el promedio de la venta de los paquetes? Asísumase que hay suficientes plátanos y peras. (UNI 2014-I)

Resolución

Se debe formar paquetes de 8 unidades entre plátanos y peras.

Observe:

N.° plátanos	N.° peras	Precio de venta
0	8	$0(0,2) + 8(0,5) = 4,0$
1	7	$1(0,2) + 7(0,5) = 3,7$
2	6	$2(0,2) + 6(0,5) = 3,4$
3	5	$3(0,2) + 5(0,5) = 3,1$
4	4	$4(0,2) + 4(0,5) = 2,8$
5	3	$5(0,2) + 3(0,5) = 2,5$
6	2	$6(0,2) + 2(0,5) = 2,2$
7	1	$7(0,2) + 1(0,5) = 1,9$
8	0	$8(0,2) + 0(0,5) = 1,6$

Los precios de venta forman una progresión aritmética y el número de términos es impar.

$\therefore$ El promedio de venta de los paquetes es S/2,8.

Rpta.: S/2,80

4. Si la diferencia entre la media aritmética y la media armónica de dos números naturales a y b es 1, determine el menor valor de $\sqrt{a^2 + b^2}$ asumiendo que $a > b$. (UNI 2014-II)

Resolución

Dato: $MA(a, b) - MH(a, b) = 1, a > b$

$$\rightarrow \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = 1$$

$$(a+b)^2 - 4ab = 2(a+b)$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = 2(a+b)$$

$$\rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{\text{Cuadrado perfecto}} = 2(a+b)$$

$$(a-b)^2 = \underbrace{2(a+b)}_{2 \times 2^2}$$

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=4 \end{cases} \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases} \quad a \text{ y } b \text{ mínimos}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Rpta.: } 2\sqrt{10}$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $MA(a; b)$ la media aritmética de a y b , $MG(a; b)$ la media geométrica de a y b , y $MH(a; b)$ la media armónica de a y b . Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- Si $MA(a; b) = MG(a; b)$, entonces

$$MG(a; b) = MH(a; b) \quad (\quad)$$

- Si $MG(a; b) = MH(a; b)$, entonces

$$MA(a; b) = MG(a; b) \quad (\quad)$$

- Si $MA(a; b) - MG(a; b) > 0$, entonces

$$MG(a; b) - MH(a; b) > 0 \quad (\quad)$$

Resolución

Sabemos:

Para datos todos iguales: $MA = MG = MH$

Para datos no todos iguales: $MA > MG > MH$

$$\begin{aligned} \text{➤ } MA(a; b) &= MG(a; b) \rightarrow a=b \\ &\rightarrow MG(a; b) = MH(a; b) \quad (V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } MG(a; b) &= MH(a; b) \rightarrow a=b \\ &\rightarrow MA(a; b) = MG(a; b) \quad (V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } MA(a; b) - MG(a; b) &> 0 \rightarrow a > b \\ &\rightarrow MG(a; b) - MH(a; b) > 0 \quad (V) \end{aligned}$$

$$\therefore VVV$$

$$\text{Rpta.: } VVV$$



Helicopráctica

Nivel I

1. Un alumno durante sus 15 primeros días de clases ha resuelto, en promedio, 12 problemas al día. Si diariamente resuelve por lo menos 10 problemas, ¿cuál sería la máxima cantidad de preguntas que puede haber resuelto en un día?

Resolución

2. El promedio geométrico de 3; 9; 27; 81; ... (n números) es 729. Halle el valor de n .

Resolución

Nivel II

3. La edad promedio en un salón de 50 alumnos es 16,4. Si se considera solo a las mujeres, la edad promedio sería 16 años; pero si solo se considera a los varones, el promedio sería 17 años. Calcule la diferencia entre las cantidades de varones y mujeres.

Resolución

5. La media aritmética y la media geométrica de dos números enteros positivos se diferencian en 6 unidades y la suma de las raíces cuadradas de estos números es $6\sqrt{3}$. Calcule la media armónica de dichos números.

Resolución

4. Un estudiante de la UNI finalizando el ciclo observa las notas que ha obtenido en el curso de Matemática I que son 08; 12; 14 y 10 en cuatro prácticas; 10 en el examen parcial. Indique cuánto debe ser la nota que debe sacar en el examen final para que obtenga un promedio de 12 si el sistema de calificación es el siguiente:

	Peso
Promedio de prácticas	1
Examen parcial	1
Examen final	2

Además, solo se considera la nota de tres prácticas anulando la más baja.

Resolución

6. Si

$$MH(a, b) = 3$$

$$MH(a, c) = 3,2$$

$$MH(b, c) = \frac{48}{7}$$

calcule la $MH(a, b, c)$.

Resolución

7. En la distribuidora Oraz el promedio de sueldos de sus 200 trabajadores es S/1800. Para el año 2020, los dueños han hecho público el incremento de sueldos. Determine el nuevo promedio de sueldos si se anunció que a los 5 directores, a cada uno se le aumentará S/500; a los 15 jefes de área, a cada uno se le aumentará S/200 y al resto del personal, a cada uno se le incrementará S/80.

Resolución

Nivel III

9. En una pista circular, un automóvil se desplaza cada vuelta a velocidades de 2; 6; 12; 20;... ; 380 km/h, respectivamente. Determine la velocidad promedio del automóvil en todo el recorrido.

Resolución

8. La media geométrica de dos números enteros es $10\sqrt{6}$, y su MH y MA son dos números consecutivos. Calcule la diferencia de los números.

Resolución

10. La MA de tres números enteros positivos es 14, además, la MG de los dos menores es $8\sqrt{2}$ y la de los dos mayores es $12\sqrt{2}$. Calcule, aproximadamente, la MH del menor y el mayor de dichos números.

Resolución

11. La media aritmética de dos números y la media armónica de dichos números están en la relación de 15 a 16. Calcule la media geométrica si la diferencia de los números al cuadrado es 36.

Resolución

12. Una hormiga recorre el perímetro de un polígono regular por una vez con velocidades de 3; 15; 35; 63;... metros por minuto. Al calcular la velocidad promedio de la hormiga sobre su recorrido se obtuvo 35 metros por minuto. Calcule el número de lados del polígono regular si solo recorrió una vez cada lado.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. La media geométrica de cuatro números diferentes entre sí es $3\sqrt{3}$. Calcule la media aritmética de dichos números.

Resolución

2. La media armónica de 20 números es 12 y de otros 30 números es 15. Calcule la media armónica de los 50 números.

Resolución

3. Un estudiante de Ingeniería de la UNMSM que cursa el ciclo I obtuvo las siguientes notas:

	Nota	Crédito
Matemática I	12	5
Física I	11	5
Química I	14	5
Economía	15	2
Inglés	19	1

Calcule su promedio ponderado.

Resolución

5. La diferencia de dos números es 72, y la suma de sus MG y MA es 216. Calcule la diferencia de la MA y MG de dichos números.

Resolución

Nivel II

4. De un grupo de 20 personas; se sabe que el promedio de sus edades es 28,5 años; además todos tienen al menos 24 años. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el promedio de edades de los dos mayores?

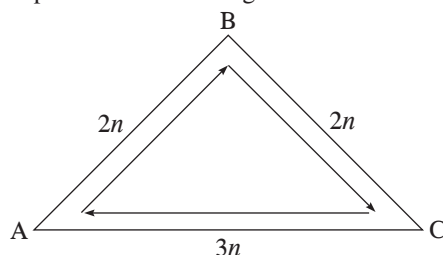
Resolución

6. La MA y MG de dos números pares están en la relación de 29 a 21. ¿Cuál será la menor diferencia de dichos números?

Resolución

Nivel III

7. Un ciclista realiza un recorrido que consiste en las tres etapas mostradas en el gráfico.



Si emplea una velocidad de 30, 20 y 10 km/h para cada tramo, empezando por A; ¿cuál es su velocidad promedio?

Resolución

8. El promedio aritmético de N números es 50. Si eliminaron los n números 18 que se tiene, el promedio aumenta en n unidades. Halle el valor N si este es a n como 11 es a 3.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. El promedio de las notas de 4 alumnos es 16, ninguno de ellos es menor de 14. ¿Cuál es la máxima nota que podría tener uno de ellos?
- A) 16 B) 18 C) 20
D) 22 E) 21
2. Calcule el promedio ponderado de un estudiante, cuya información de sus cursos está consignada en el siguiente cuadro:

Curso	Cantidad de créditos	Promedio
Matemática I	5	12
Cálculo I	5	14
Química General I	8	15
Física I	5	14
Redacción	2	16

- A) 14,08 B) 14 C) 15,20
D) 16,25 E) 14,25

Nivel II

3. Se sabe que la MH de tres números impares consecutivos es 20,87263... Calcule la MA de los dos mayores de dichos números.
- A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24
4. Un ciclista, durante la primera hora de viaje, va a una velocidad de 20 km/h; la siguiente hora pedalea a razón de 40 km/h; y en la tercera hora de viaje acelera a razón de 60 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio del ciclista en todo el viaje?
- A) 40 km/h B) $36,1\overline{8}$ km/h
C) 30 km/h D) 55 km/h
E) $32,7\overline{2}$ km/h

Nivel III

5. Si la MA de dos números enteros positivos es $9/5$ de su MH, calcule la diferencia de dichos números sabiendo que el mayor de ellos es 45.
- A) 25 B) 9 C) 36
D) 27 E) 45



Test 2

Nivel I

1. La estatura promedio de un salón de clase es 1,66 m. Si las mujeres tienen una estatura promedio de 1,54 m, determine la estatura promedio de los varones si la cantidad de varones y mujeres que hay en el salón están en la relación de 3 a 2.

A) 1,68 m B) 1,72 m C) 1,74 m
D) 1,78 m E) 1,70 m

2. La media geométrica de dos números es 14 y su media armónica es $\frac{56}{5}$. Halle los números.

A) 21 y 14 B) 28 y 14 C) 28 y 7
D) 49 y 7 E) 49 y 4

Nivel II

3. Cuando el tren va de Huancayo a Huancavelica su velocidad es de 72 km/h y al volver de Huancavelica a Huancayo es de 78 km/h. Determine la velocidad promedio del tren en el recorrido que ha hecho.

A) 73,5 km/h B) 76,82 km/h C) 73,5 km/h
D) 74,88 km/h E) 75,5 km/h

4. De dos números pares diferentes se sabe que el producto de sus tres promedios es 22^3 . Calcule la MA de dichos números.

A) 22 B) 61 C) 122
D) 48 E) 116

Nivel III

5. Se tiene dos tipos de vino en dos recipientes, el primero contiene A litros de vino y el segundo recipiente contiene B litros de vino de otra calidad. Si se intercambian 30 litros, se obtendrían dos mezclas de la misma calidad. Calcule la MH de A y B.

A) 30 B) 60 C) 15
D) 20 E) 90



Helicodesafío

- Una minivan que realiza servicio escolar de lunes a viernes recorre diariamente 40 km. Si durante la semana tuvo que cambiar una llanta, determine el recorrido promedio por llanta en esa semana.
A) 204 m B) 216 m C) 230 m
D) 224 m E) 210 m
- La media geométrica de tres números enteros y diferentes es igual a uno de ellos, y la media proporcional del menor y el mayor de dichos números es 7. Determine la media aritmética de dichos números.
A) 17 B) 19 C) 15
D) 16 E) 13
- El promedio armónico de tres números impares consecutivos es 6,60839 y que A es el mayor promedio aritmético de 2 de dichos números, además, el promedio armónico de 5 números es 30 y de otros 7 números es 21, se sabe que B es el promedio armónico de estos 12 números. Calcule $A+B$.
A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34
- La MG y MH de dos números están en la relación de 5 a 4. Si la diferencia de dichos números es 30, halle el mayor de estos números.
A) 16 B) 40 C) 32
D) 24 E) 48
- En una fábrica de conservas, existen tres máquinas. En una hora, la máquina A produce 400 latas; la máquina B, 640 latas en 2 h; y la máquina C, 1080 latas de conserva en 3 h. Determine la producción promedio por hora de conservas en dicha fábrica si todas las máquinas deben producir la misma cantidad de conservas. (Aproxime su respuesta a centésimas).
A) 360,50 B) 357,02 C) 380,04
D) 340,05 E) 387,20



Bibliografía y cibergrafía

Capítulos 1, 2, 3 y 4

- GARCÍA, Jimmy. *Aritmética, Teoría y problemas*. Editorial Rodo. Lima.
- HENÁNDEZ, Hernán. *Aritmética*. Editorial San Marcos. Lima.
- SANTIESTEBAN, Mario. *Aritmética, Teoría y problemas*. Editorial San Marcos. Lima.
- Escalas dibujo técnico
 - <http://WWW.areatecnologia.com/dibujo-tecnico/escalas.htm>
- Regla del tanto por tanto
 - http://WWW.academia.edu/341949737/REGLA_DEL_TANTO_POR_CUANTO
- La media aritmética, geometría y armónica, su visualización (pag. 36-37)
 - <http://WWW.uaslp.mx/Comunicacion-Social/Documents/Divulgacion/Revista/Catorce/218/218-08.pdf>

MAGNITUDES PROPORCIONALES



Objetivos

- Identifica las magnitudes que nos rodean y relaciona proporcionalmente dos o más magnitudes.
- Conoce y aplica las relaciones directa e inversamente proporcional entre dos magnitudes.
- Conoce y aplica las propiedades de las magnitudes proporcionales.



Sabías que...

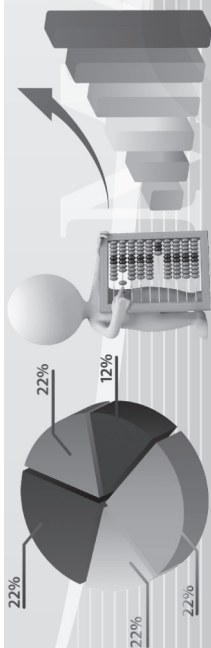
LA EXPERIMENTACIÓN

Para las ciencias experimentales, la medición constituye una operación fundamental. Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles. Las unidades, como cantidades de referencia a efectos de comparación, forman parte de los resultados de estas mediciones.

Se consideran ciencias experimentales aquellas que por sus características y, particularmente por el tipo de problemas de los que se ocupan, pueden someter sus afirmaciones o enunciados al juicio de la experimentación. En un sentido científico la experimentación hace alusión a una observación controlada; en otros términos, experimentar es reproducir en el laboratorio el fenómeno en estudio con la posibilidad de variar a voluntad y de forma precisa las condiciones de observación.

Con frecuencia, los experimentos científicos solo pueden ser entendidos en el marco de una teoría que orienta y dirige al investigador sobre qué es lo que hay que buscar y sobre qué hipótesis deberán ser contrastadas experimentalmente. Pero, en ocasiones, los resultados de los experimentos generan información que sirve de base para una elaboración teórica posterior.

Este doble papel de la experimentación como juez y guía del trabajo científico se apoya en la realización de medidas que facilitan una descripción de los fenómenos en términos de cantidad. La medición constituye entonces una operación clave en las ciencias experimentales.





Helicoteoría

Magnitud

Es aquella cualidad de un cuerpo o fenómeno que, referida a una unidad de la misma especie, puede ser medida. Consideraremos las magnitudes que son propiedades o atributos medibles.

Cantidad

Es el resultado de medir y cuantificar una determinada magnitud en ciertas unidades en un determinado momento de análisis.

Ejemplos

Magnitud	Cantidad
Longitud	200 m; 4,5 km
Masa	30 g ; 22 kg
Volumen	12 L ; 72,5 m ³

Relaciones entre magnitudes

En un determinado contexto donde intervienen dos o más magnitudes, estas se pueden relacionar, evaluándolas dos a dos y considerando a las demás invariables (constantes).

Estudiaremos:

1. Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Dos magnitudes analizadas aisladamente serán DP si al aumentar o disminuir los valores de una de ellas, los valores correspondientes de la otra magnitud, aumentarán o disminuirán, pero en la misma proporción.

Ejemplo

Un pedido de 6 bidones de agua de mesa factura S/144.

Relacionemos las magnitudes número de bidones y costo y observemos el comportamiento de sus valores.

“Por la compra de más bidones el costo será mayor y por la compra de menos bidones el costo será menor”.

Observemos:

Costo (S/)	144	288	72	720
Número de bidones	6	12	3	30

Diagrama de relaciones de proporcionalidad:

- De 144 a 288: $\times 2$
- De 288 a 720: $\times 5$
- De 720 a 72: $\times 1/2$
- De 72 a 144: $\times 2$
- De 144 a 72: $\times 1/2$
- De 72 a 288: $\times 4$
- De 288 a 720: $\times 5$
- De 720 a 144: $\times 1/5$
- De 144 a 72: $\times 1/2$

“Si el valor del costo aumenta o disminuye, el valor correspondiente del número de bidones, aumentará o disminuirá, en la misma proporción”

Afirmamos:

(Costo) DP (Número de bidones)

Si dos magnitudes son DP con respecto a sus valores el cociente es constante.

Del cuadro:

$$\frac{144}{6} = \frac{288}{12} = \frac{72}{3} = \frac{720}{30} = 24$$

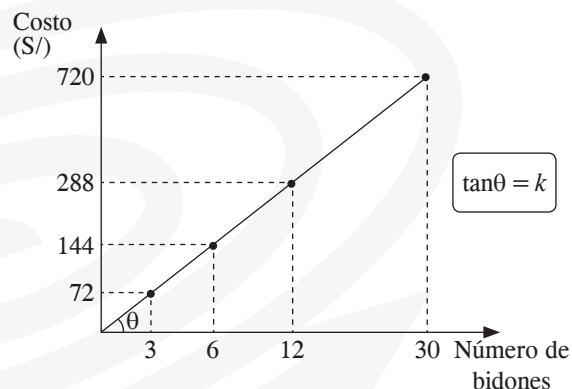
Constante de proporcionalidad directa

Afirmamos:

$$\frac{\text{Valores (Costo)}}{\text{Valores (Número de bidones)}} = k$$

Ahora cada pareja de valores correspondientes a las magnitudes se representarán en el sistema de coordenadas rectangulares.

Observe:



La gráfica de dos magnitudes DP son puntos que pertenecen a una misma recta que pasa por el origen de coordenadas. En cada punto de dicha recta el cociente es constante (excepto en el origen).

Sea $(x; y)$ un punto que pertenece a dicha recta.

Observe:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{Ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas}$$

Pero $y = f(x)$ “y está en función de x”.

$$\text{Reemplazando: } \frac{f(x)}{x} = k$$

$$f(x) = xk$$

Es una función de proporcionalidad directa

2. Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Dos magnitudes analizadas aisladamente serán IP si al aumentar o disminuir los valores de una de ellas, los valores correspondientes de la otra magnitud, disminuirán o aumentarán pero en la misma proporción.

Ejemplo

Si hacemos funcionar 18 grifos iguales llenarán un tanque en 40 horas.

Relacionemos las magnitudes número de grifos y número de horas y observemos el comportamiento de sus valores.

“Si funcionan más grifos llenan el tanque en menos horas y si funcionan menos grifos llenan el tanque en más horas”.

Observemos:

Número de horas	40	20	80	48
Número de grifos	18	36	9	15

Diagrama de relaciones entre valores:

- De 40 a 20 horas: $\times 1/2$
- De 20 a 80 horas: $\times 2$
- De 80 a 48 horas: $\times 6/5$
- De 18 a 36 grifos: $\times 2$
- De 36 a 9 grifos: $\times 1/2$
- De 9 a 15 grifos: $\times 5/6$

“Si el valor del número de horas aumenta o disminuye, el valor correspondiente del número de grifos, disminuirá o aumentará, en la misma proporción”.

Afirmamos:

(Número de horas) IP (Número de grifos)

Si dos magnitudes son IP con respecto a su valores el producto es constante.

Del cuadro:

$$40 \times 18 = 20 \times 36 = 80 \times 9 = 48 \times 15 = 720$$

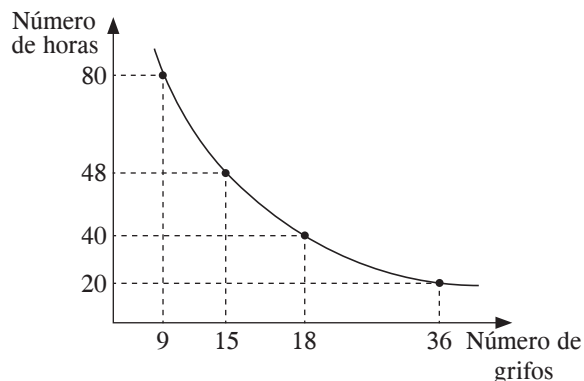
Constante de proporcionalidad inversa $\rightarrow$

Afirmamos:

$$\begin{pmatrix} \text{Valores} \\ \text{Número} \\ \text{de horas} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Valores} \\ \text{Número} \\ \text{de grifos} \end{pmatrix} = k'$$

Ahora cada pareja de valores correspondientes a las magnitudes se representarán en el sistema de coordenadas rectangulares.

Observe:



La gráfica de dos magnitudes IP son puntos que pertenecen a una misma rama de hipérbola equilátera. En cada punto el producto de valores es constante (área de cada sector rectangular que se genera al trazar perpendiculares a los ejes de dichos puntos).

Sea $(x; y)$ un punto que pertenece a dicha rama de hipérbola equilátera.

Observe:

$y \cdot x = k'$ Ecuación de la hipérbola equilátera

Pero $y = f(x)$ “y está en función de x ”.

Reemplazando:

$$f(x) \cdot x = k'$$

$f(x) = \frac{k'}{x}$ es una función de proporcionalidad inversa

Propiedades de las magnitudes proporcionales

Sean las magnitudes A, B, C y D se cumple

$$1. \quad A \text{ DP } B \leftrightarrow B \text{ DP } A$$

$$C \text{ IP } D \leftrightarrow D \text{ IP } C$$

$$2. \quad A \text{ DP } B \leftrightarrow A^n \text{ DP } B^n, n \in \mathbb{Q}, n \neq 0$$

$$C \text{ IP } D \leftrightarrow C^m \text{ IP } D^m, m \in \mathbb{Q}, m \neq 0$$

$$3. \quad A \text{ DP } B \leftrightarrow A \text{ IP } \frac{1}{B}$$

$$C \text{ IP } D \leftrightarrow C \text{ DP } \frac{1}{D}$$

$$4. \quad A \text{ DP } B, C: \text{ constante}$$

$$A \text{ DP } C, B: \text{ constante}$$

$$\text{Entonces: } A \text{ DP } B \times C$$

(Siendo A la magnitud de referencia)

$$5. \quad A \text{ DP } B, C \text{ y } D: \text{ constantes}$$

$$A \text{ IP } C, B \text{ y } D: \text{ constantes}$$

$$A \text{ DP } D, B \text{ y } C: \text{ constantes}$$

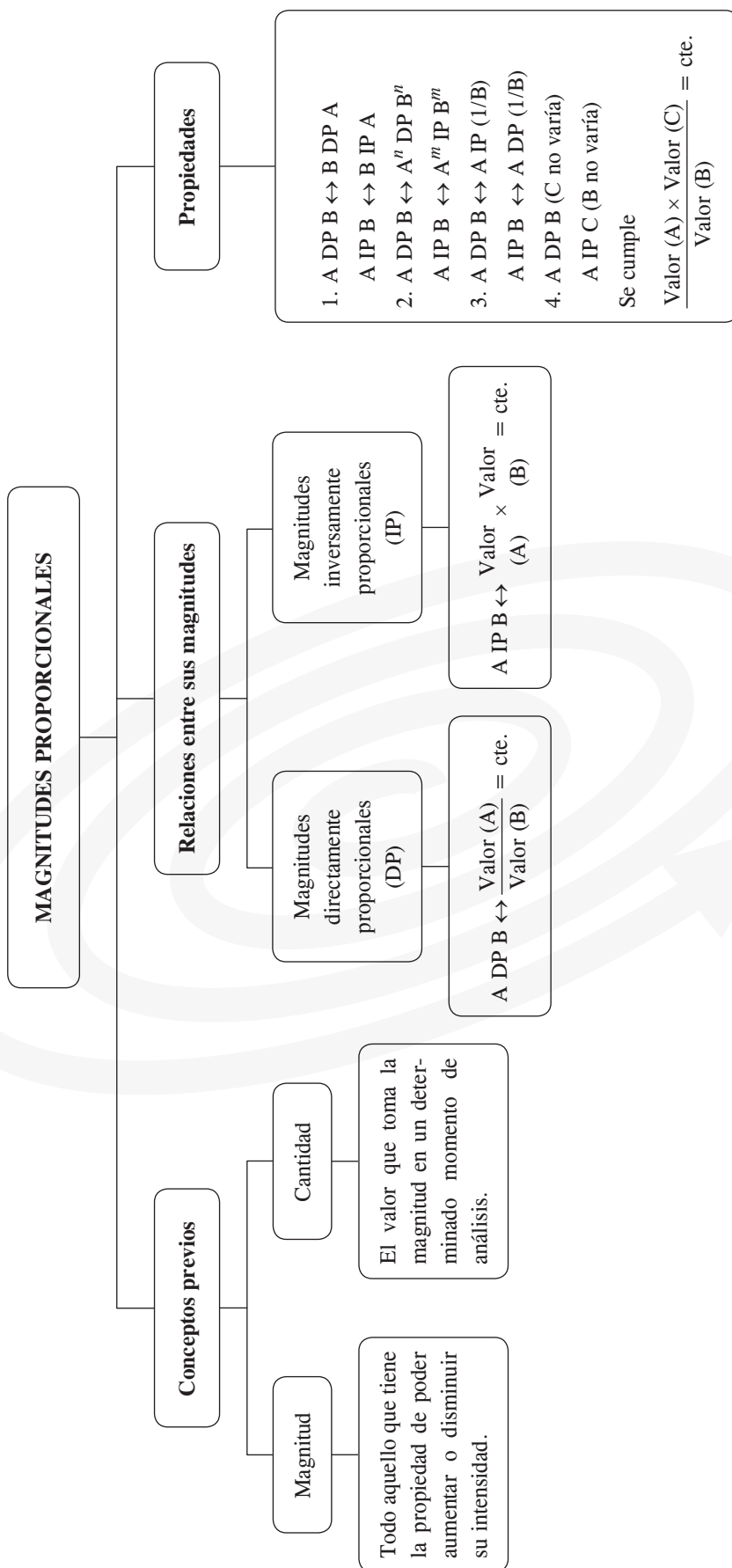
Entonces, respecto a sus valores

$$\frac{A \times C}{B \times D} = \text{constante}$$

(Siendo A la magnitud de referencia)

Transitividad en la proporcionalidad

Si $A \text{ DP } B$ en un aspecto del fenómeno donde C no interviene y por otro lado $B \text{ DP } C$ en otro aspecto del fenómeno donde A no interviene, entonces $A \text{ DP } C$.





Problemas resueltos

1. Supongamos que A varía directamente proporcional a x y z , e inversamente proporcional a w . Si $A = 154$ cuando $x = 6$, $z = 11$, $w = 3$, determine el valor de A cuando $x = 9$, $z = 20$, $w = 7$. (UNI 2007-I)

Resolución

Por dato

A DP x (z y w constantes)

A DP z (x y w constantes)

A IP w (x y z constantes)

Respecto a sus valores se cumple

$$\frac{A \times w}{x \times z} = k$$

A	154	m
x	6	9
z	11	20
w	3	7

$$\frac{(154)(3)}{(6)(11)} = \frac{(m)(7)}{(9)(20)}$$

$$\therefore m = 180$$

Rpta.: 180

2. Luis confecciona 5 docenas de pantalones cada semana y Eva 2 docenas de camisas por día. Cuando Luis termina 3 docenas de pantalones, ¿cuántas camisas confecciona Eva? (UNI 2005-I)

Resolución

Del enunciado:

Luis en 1 semana: $5 \times 12 = 60$ pantalones

Eva en 1 semana: $2 \times 10 \times 7 = 140$ camisas

Ahora:

Luis confecciona $3 \times 12 = 36$ pantalones

Eva confecciona x camisas.

$$\text{Entonces: } \frac{60}{140} = \frac{36}{x} \rightarrow \frac{36}{x} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore x = 84$$

Rpta.: 84

3. De las magnitudes z , w y x , se sabe que z es directamente proporcional a x^2 y w es inversamente proporcional a x^2 . Si $N = z + w$ y $x = 1$ implica que $N = 6$ y $x = 0,5$ implica que $N = 9$, determine el valor de N si $x = \sqrt{2}$. (UNI 2008-II)

Resolución

Se sabe

$$\frac{z}{x^2} = k_1 \rightarrow z = x^2 k_1$$

$$w x^2 = k_2 \rightarrow w = \frac{k_2}{x^2}$$

Además: $N = z + w$

$$N = x^2 k_1 + \frac{k_2}{x^2}$$

Ahora

x	1	0,5	$\sqrt{2}$
N	6	9	m

$$6 = (1^2)k_1 + \frac{k_2}{1^2} = k_1 + k_2$$

$$9 = (0,5^2)k_1 + \frac{k_2}{(0,5)^2} = \frac{k_1}{4} + 4k_2$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 6 \\ k_1 + 16k_2 = 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_2 = 2 \\ k_1 = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow m = (\sqrt{2})^2 \cdot (4) + \frac{2}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\therefore m = 9$$

Rpta.: 9

4. Las magnitudes x e y son tales que $(y - 4)$ y $(x^2 - 4)$ son inversamente proporcionales. Si el par $(-1; -2)$ satisface esa relación, determine la ecuación de proporcionalidad. (UNI 2014-II)

Resolución

Por dato: $(y - 4)(x^2 - 4) = k$

El par $(-1; -2)$ satisface dicha relación.

Entonces: $(-2 - 4)((-1)^2 - 4) = k$

$$(-6)(-3) = k \rightarrow k = 18$$

Ahora

$$(y - 4)(x^2 - 4) = 18$$

$$\therefore y = \frac{18}{x^2 - 4} + 4$$

$$\text{Rpta.: } y = \frac{18}{x^2 - 4} + 4$$

5. Un contratista dice que puede terminar un tramo de una autopista en a días si le proporcionan un cierto tipo de máquinas, pero con c máquinas adicionales de dicho tipo, puede hacer el trabajo en b días ($a - b = 1$) si el rendimiento de las máquinas es el mismo, entonces el número de días que empleará una máquina para hacer el trabajo es (UNI 2001-II)

Resolución

Observe:

(Número de máquinas) IP (Número de días)

Entonces: $\left(\begin{matrix} \text{Número de} \\ \text{máquinas} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \text{Número} \\ \text{de días} \end{matrix} \right) = \text{cte.}$

Ahora

Número de máquinas	m	$m + c$	1
Número de días	a	b	x

Se cumple: $\underbrace{(m)(a)}_{am} = \underbrace{(m+c)b}_{bm+ac} = (1)(x)$

$$m(a - b) = bc$$

Por dato: $a - b = 1 \rightarrow m = bc$

Reemplazando: $(b \cdot c)(a) = x$

$$\therefore x = abc$$

Rpta.: abc .





Helicopráctica

Nivel I

1. Sean A y B magnitudes, tal que:

- A IP $\sqrt{B}$, si $B \leq 18$
- $\sqrt{A}$ DP B, si $B \geq 18$

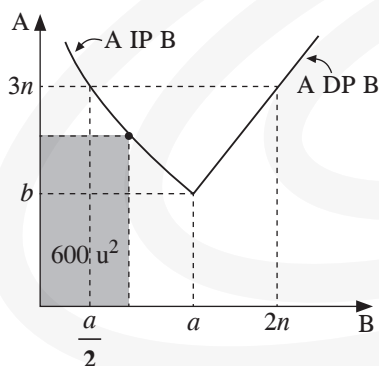
Cuando $A = 15$, $B = 8$. Si $B = 36$, halle el valor que toma A.

Resolución

3. Sean f y g funciones de proporcionalidad directa e inversa, respectivamente, de constantes enteras y positivas; además, $f(5) + g(5) = 12$. Calcule la diferencia del máximo y mínimo valor de $f(7) + g(1/3)$.

Resolución

2. Si A y B son magnitudes, calcule $a + b + n$.



Resolución

4. En una fábrica de muebles, el costo de un ropero es DP a las horas que demora fabricarlo e IP a la cantidad de roperos fabricados. Si cuando se han fabricado 40 roperos uno de ellos cuesta S/360 porque se han tardado 5 h en fabricarlo, ¿cuánto costará un ropero cuando se hayan fabricado 60 roperos y se hayan demorado 6 h en fabricarlo?

Resolución

Nivel II

5. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- Si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas. ()
- Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, entonces los puntos que corresponden a los valores de esas magnitudes, están sobre una de las ramas de la gráfica de una hipérbola equilátera. ()
- Si $A \propto B$ cuando C es constante y $A \propto C$ cuando B es constante, entonces $A \propto B \cdot C$ cuando todos varían. ()

Resolución

6. A, B y C representan tres magnitudes que guardan cierta relación de proporcionalidad. Además:

A	10	8	8	x	8
B	3	24	3	3	6
C	50	4	32	18	y

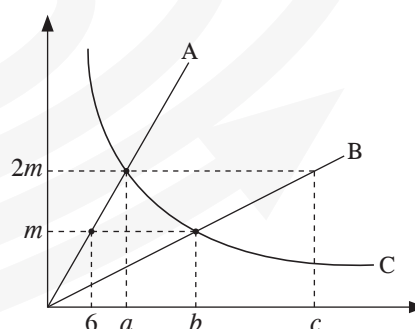
Calcule $x + y$.

Resolución

7. El precio de un ladrillo es proporcional a su peso e inversamente proporcional a su volumen. Si un ladrillo de densidad $1,5 \text{ g/cm}^3$ cuesta S/300, ¿cuál es el costo, en soles, de un ladrillo de 400 cm^3 y cuya masa es $1,6 \text{ kg}$?

Resolución

8. En la gráfica, se muestra el comportamiento de las magnitudes A, B y C.



Halle el valor de $a + b + c$.

Resolución

Nivel III

9. En un fenómeno intervienen tres magnitudes A, B y C y se sabe que cuando C es constante:

A	2	3	4	5
B	12	8	6	4,8

y cuando B es constante:

A	6	24	54	96
C	2	4	6	8

y que cuando $B = 5$ y $C = 6$, $A = 18$.

¿Cuál será el valor de A, cuando $B = 10$ y $C = 18$?

Resolución

10. El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su masa. Un joyero que tenía un diamante que valía 7680 dólares piensa partirlo en dos partes que sean entre sí como 3 a 5, pero luego cambia de opinión y lo parte en dos partes iguales. ¿Cuánto ganó ó perdió, en dólares, al cambiar de opinión?

Resolución

11. En un laboratorio se determinó que una barra de acero sufre una dilatación lineal por efecto del calor, de modo que la variación de su longitud es DP a la variación de su temperatura. Si a 0°C la longitud de una barra es 5 m y a 17°C la longitud es 5,068 m, ¿cuánto medirá a los 40°C ?

Resolución

12. Indique verdadero (V) o falso (F) a las siguientes proposiciones.

a. Si $f(i)$ DP i ; $f(3) + f(7) = 20 \rightarrow f(5) = 10$ ()

b. Si $f(i)$ IP i ; $f(3) + f(7) = 30 \rightarrow f(5) = 15$ ()

c. Si $f(i)$ DP i ; entonces $\sum_{i=1}^{20} f(i) = 420$ ()

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. La magnitud A es IP a $\sqrt{B}$, además cuando $A = 6$, entonces $B = 16$. Halle el valor de B cuando $A = 4$.

Resolución

3. Sean $f(x)$ una función de proporcionalidad directa y $g(x)$ una función de proporcionalidad inversa, tales que

$$\triangleright g(1) - f(1) = 96 \quad \triangleright f(10) \cdot g(10) = 400$$

$$\triangleright f(m) = g(m)$$

Halle el valor de m .

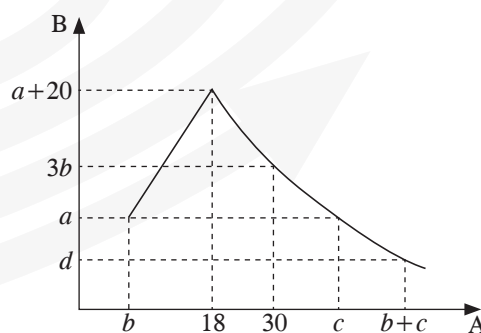
Resolución

Nivel II

2. Para pintar una pared cuadrada de 5 m de lado, se emplearon 15 tarros de pintura. ¿Cuántos tarros se necesitarán para pintar 5 paredes, cuyas dimensiones son 2 m y 3 m menos de cada lado?

Resolución

4. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de dos magnitudes, A y B, que guardan cierta relación de proporcionalidad



Si a , b , c y d son enteros positivos, calcule $a + b + c + d$.

Resolución

5. Si A y B son dos magnitudes que se relacionan de la siguiente manera:

- Para $B \leq 12$: A IP B^3
- Para $12 \leq B \leq 36$: A DP B^2
- Para $B \geq 36$: A IP $\sqrt{B}$

Si se sabe que $A = 32$, cuando $B = 6$, determine el valor de A cuando $B = 144$.

Resolución

6. Lo que cobra un transportista de carga es proporcionalidad al peso que transporta y a la distancia recorrida, pero es inversamente proporcional al tiempo que demora en entregar la carga. Se sabe que por transportar 2 toneladas y recorrer 36 km demora 1 h con 20 min y cobra S/250; ¿cuánto cobrará por transportar 3 toneladas a una distancia de 48 km si demora 1 h con 4 min?

Resolución

Nivel III

7. Sean las magnitudes M, N y P, tal que se cumple:

- $\sqrt{M}$ DP N^2 (P es constante).
- N IP $\sqrt{P}$ (M es constante).

Si M disminuye en $5/9$ y P aumenta en 23 veces más su valor, ¿en cuánto aumenta o disminuye el valor de N?

Resolución

8. Al comparar las magnitudes A y B cuando la magnitud C no varía, se obtuvo:

A	2	3	4	6
B	8	18	32	72

Al comparar las magnitudes A y C cuando la magnitud B no varía, se obtuvo:

A	20	16	4	5
C	8	10	40	32

Si $A = 6$; $B = 15$ y $C = 10$, calcule la suma de cifras del valor de A, cuando $B = 60$ y $C = 3$.

Resolución



Test 1

Nivel I

- Si $f(x)$ es función de proporcionalidad directa y además $f(9) + f(12) = 84$, calcule $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(7)$.
A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 30
- Cierta cantidad de pintores puede pintar una pared cuadrada de 3 m de lado, y si se contratan 42 pintores más podrían pintar otra pared cuadrada de 4 m de lado en el mismo tiempo. ¿Cuántos pintores había al inicio?
A) 45 B) 48 C) 52
D) 54 E) 60

Nivel II

- En un fenómeno químico intervienen las magnitudes A, B, C y D, A DP B (cuando C y D son constantes); A IP C^2 (cuando B y D son constantes) y A DP $\sqrt{D}$ (cuando B y C son constantes). Si B aumenta en su doble, C disminuye en $\frac{1}{3}$ de su valor y D aumenta en su triple, el valor de A se multiplicará por
A) 6,5. B) 9,5. C) 12.
D) 13,5. E) 15.
- Se sabe que A, B y C son magnitudes que guardan cierta relación de proporcionalidad de acuerdo a las siguientes tablas:

➤ Cuando C es constante

A	16	10	12
B	64	25	36

➤ Cuando B es constante

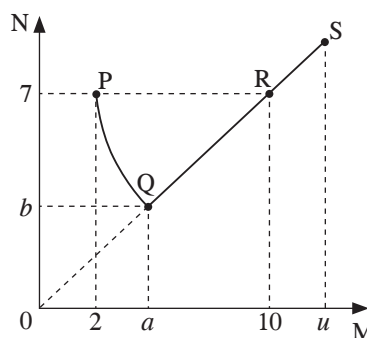
A	18	24	36
C	27	64	216

Si cuando $A = 72$, $B = 9$ y $C = 8$, halle el valor de B cuando $A = 120$ y $C = 125$.

- A) 2 B) 6 C) 3
D) 5 E) 4

Nivel II

- Para las magnitudes M y N se tiene que en el intervalo $\langle 0; a \rangle$ presentan proporcionalidad inversa y en $[a; u]$ proporcionalidad directa. Si $P = (2; 7)$, entonces, el punto Q es



- A) $\left(2; \frac{7\sqrt{5}}{5}\right)$. B) $\left(\sqrt{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. C) $\left(\sqrt{5}; \frac{1}{7}\right)$.
D) $\left(2\sqrt{5}; \frac{7\sqrt{5}}{5}\right)$. E) $(2\sqrt{5}; 7)$.



Test 2

Nivel I

1. Si f es una función de proporcionalidad inversa y

$$f(4) = 6, \text{ el valor de } E = \frac{f(3) \times f(6)}{f(5)} \text{ es}$$

- A) 3. B) $3, \bar{3}$. C) $6, \bar{6}$.
D) 7. E) $7, \bar{2}$.

2. Una secretaria piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, completará el trabajo a realizar tres días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas de más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir?

- A) 12 B) 36 C) 72
D) 90 E) 120

Nivel II

3. Se sabe que A es directamente proporcional al cuadrado de B y al cubo de C e inversamente proporcional con la raíz cuadrada de F. Determine el valor de $x+y$ sabiendo que

Magnitudes	Cantidades		
A	x	108	324
B	5	2	4
C	$2x$	$3x$	y
F	25	9	16

- A) 120 B) 160 C) 320
D) 360 E) 480

4. Sean A, B y C tres magnitudes que guardan cierta relación de proporcionalidad, tales que

	Valores				
A	10	8	8	x	8
B	3	24	3	3	6
C	50	4	32	18	y

Calcule $x + y$.

- A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

Nivel III

5. La potencia de un circuito es proporcional a su resistencia y al cuadrado de la corriente. La potencia aumenta en 100 % cuando la resistencia disminuye en 2 % y la corriente varía en 9 amperios. Determine, en amperios, la corriente antes que varíe.

- A) 14 B) 15 C) 20
D) 21 E) 28



Helicodesafío

1. Sean x , y y z magnitudes, tales que x DP y cuando z es constante; $\sqrt{x}$ IP z cuando y es constante. Además

x	6	1	b
y	2	27	$8a$
z	1	a	b

Calcule $a+b$.

- A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16
2. En cierto fenómeno físico, se observa que A DP B ; en otro fenómeno, donde A no interviene, se observa que $\sqrt{B}$ IP C ; y en otro fenómeno, donde no intervienen A y B , se tiene que C IP D . De acuerdo a esto, cada vez que A aumenta su valor en un 69%, el valor de la magnitud D :
- A) Disminuye 1,3 % B) Aumenta 30 %
C) Disminuye 69 % D) Disminuye 30 %
E) Aumenta 1,3 %
3. En cierto fenómeno intervienen las magnitudes A , B , C y D .

Para C y D constantes se obtiene

A	4	8	12	x
B	6	3	2	1

Para B y D constantes se obtiene

A	3	6	9	12
C	2	8	18	y

Para B y C constantes se obtiene

A	72	18	8	z
D	2	4	6	1

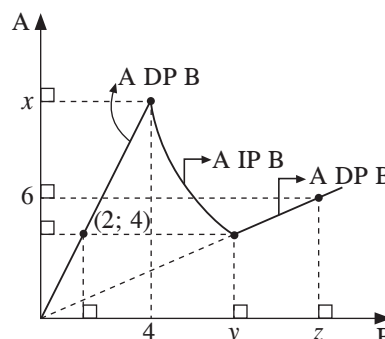
Cuando todas varían se obtiene

A	B	C	D
720	2	3	5
w	6	12	4

Calcule $x + y + z + w$.

- A) 288 B) 320 C) 344
D) 750 E) 1094

4. Dado el siguiente gráfico, calcule $\frac{x \cdot z}{y}$.



- A) $\frac{5}{3}$ B) 8 C) 9
D) 12 E) 16
5. El abastecimiento de mineral de la mina a la planta concentradora varía en razón directa a la capacidad de los volquetes, al número de horas de trabajo de estos, a la rapidez que utilizan y al número de volquetes que se utilizan, y en forma inversamente proporcional a la distancia de la mina a la planta. Se sabe que un volquete de 20 tm puede abastecer 480 tm de mineral en 8 horas de trabajo, recorriendo a 60 km/h, cuando la planta está ubicada a 20 km de la mina. Se piensa instalar una planta a 36 km de la mina, con un abastecimiento de 5000 tm por guardia de 6 horas. Los volquetes desarrollan 20 km/h y se proyecta trabajar con volquetes de 30 tm. ¿Cuántos de estos serían necesarios como mínimo, por guardia, para abastecer la planta, sabiendo que ésta trabajará al 90% de su capacidad instalada?

- A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

REPARTO PROPORCIONAL Y REGLA DE TRES



Objetivos

- Aplica la relación DP e IP y sus propiedades en algunas situaciones particulares.
- Identifica y resuelve situaciones de reparto proporcional y regla de tres.



Sabías que...

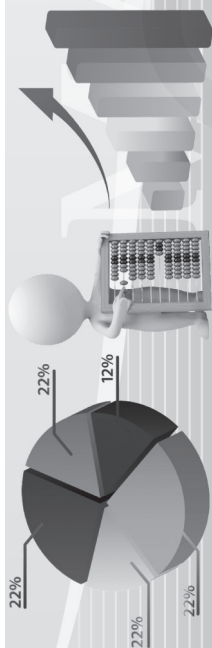
LA PROPORCIONALIDAD

Magnitudes que son directa o inversamente proporcionales a otras dos o más, dan origen al tipo de problema conocido como “regla de tres compuesta”. En esos problemas se tiene, digamos, una magnitud z directamente proporcional a x y y , e inversamente proporcional a u . Se conoce el valor z' , correspondiente a los valores particulares x' , y' , u' y se quiere determinar el valor z'' , que corresponde a otros valores particulares x'' , y'' y u'' . Por un teorema, sabemos que $z' = kx' y' / u'$ y $z'' = kx'' y'' / u''$. Dividiendo la segunda igualdad por la primera la constante k desaparece y tenemos $z''/z' = x'' y'' u' / x' y' u''$, donde $z'' = z' x'' y'' u' / x' y' u''$.

La noción de proporcionalidad es una de las más antiguas en matemática. Es también una de las más útiles, con aplicaciones frecuentes en geometría, en física, en astronomía, y en la misma vida cotidiana, de allí resulta su interés para la enseñanza. La importancia de esa noción está asociada también con el hecho de que ella se puede representar por un modelo matemático extremadamente simple, expresado por las ecuaciones $y = k \cdot x$ y $y = k/x$ en el caso de una sola variable, o por ecuaciones del tipo $y = kxy/uvw$ en el caso de varias variables.

Debe quedar claro, mientras tanto, que al estudiarse una cuestión que pueda involucrar proporcionalidad, sea ella de naturaleza científica o práctica, la ecuación (en caso de que tenga cabida) es la etapa final de la resolución del problema.

Cuando un científico, un ingeniero, un geómetra o un comerciante se encuentra con un problema, la fórmula $y = kx$ (o cualquiera de sus análogas) no viene junto con los datos. Compete primeramente al interesado verificar si el modelo $y = kx$ (o uno análogo) se adapta a su caso, antes de usarlo, es necesario comprobar que y es realmente proporcional a x .

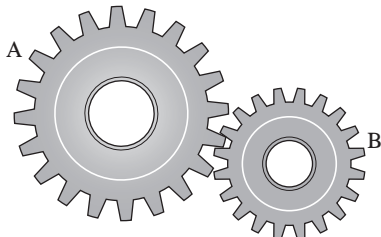




Helicoteoría

SISTEMA DE ENGRANAJES

Ruedas engranadas

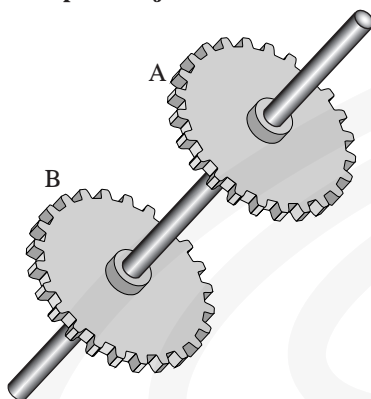


“A mayor número de dientes, menor número de vueltas”.

“A menor número de dientes, mayor número de vueltas”.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{dientes} \end{array} \right) \text{IP} \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{vueltas} \end{array} \right)$$

Ruedas unidas por un eje común



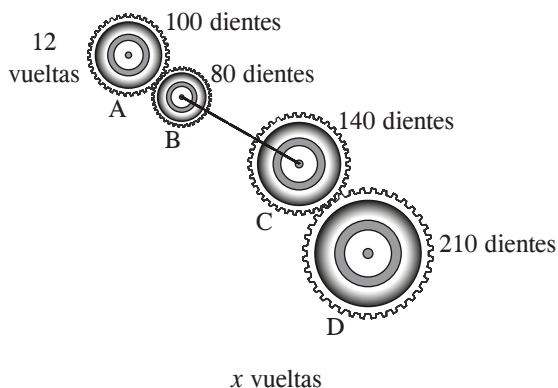
$$\left(\begin{array}{c} \text{Número de vueltas} \\ \text{de A} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Número de vueltas} \\ \text{de B} \end{array} \right)$$

Ejemplo

Una rueda A de 100 dientes engrana con otra rueda B de 80 dientes. Unida a B mediante un eje, hay otra rueda C de 140 dientes que engrana con D, que tiene 210 dientes. Si en cierto tiempo A da 12 vueltas, ¿cuántas vueltas dará D?

Resolución

Se tiene



A y B engranan

(Número de dientes) IP (Número de vueltas)

$$100(12) = (80)(V_B)$$

$$V_B = 15$$

B y C tienen eje común.

$$V_B = V_C = 15$$

C y D engranan

(Número de dientes) IP (Número de vueltas)

$$(140)(15) = (210)(x)$$

$$\therefore x = 10$$

REPARTO PROPORCIONAL

Es un procedimiento aritmético que permite repartir una cierta cantidad, en partes proporcionales (DP y/o IP) a otros números llamados índices de reparto.

Ejemplos

- Se repartirá S/3900 en forma DP a las edades de Ana, Beto y Carlos que son 15; 20 y 30 años. Halle lo que le corresponde a cada uno.

Resolución

Sean las partes S/A, S/B y S/C, donde

$$A + B + C = 3900$$

Como el reparto es DP, se tiene

$$\frac{A}{15} = \frac{B}{20} = \frac{C}{30} \rightarrow \frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{6} = k$$

$$\text{Reemplazando: } 3k + 4k + 6k = 3900$$

$$13k = 3900$$

$$\therefore k = 300$$

$\therefore$ Las partes son:

$$A = 3 \times 300 = 900 \quad B = 4 \times 300 = 1200$$

$$C = 6 \times 300 = 1800$$

- Halle lo que le corresponde a cada obrero al repartir S/4500 en forma IP al número de faltas que tuvieron, que son 20; 12 y 30.

Resolución

Sean las partes S/M, S/N y S/P, donde

$$M + N + P = 4500$$

Como el reparto es IP, se tiene

$$M \times 20 = N \times 12 = P \times 30$$

Dividimos entre $MCM(20; 12; 30) = 60$

$$\frac{M}{3} = \frac{N}{5} = \frac{P}{2} = k$$

Reemplazando: $3k + 5k + 2k = 4500$

$$10k = 4500$$

$$k = 450$$

∴ Las partes son:

$$M = 3 \times 450 = 1350$$

$$N = 5 \times 450 = 2250$$

$$P = 2 \times 450 = 900$$

3. Un padre repartirá S/8400 a sus tres hijos en forma DP a sus edades que son 12; 15 y 18 años y a la vez IP a sus pesos que son 40; 45 y 60 kg, respectivamente. Halle cada una de las partes.

Resolución

Sean las partes S/a, S/b y S/c, donde

$$a + b + c = 8400$$

Del enunciado

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Parte) DP (Edad)} \\ \text{(Parte) IP (Peso)} \end{array} \right\} \frac{\text{(Parte)(Peso)}}{\text{(Edad)}} = \text{cte.}$$

Observe:

Parte	Edad	Peso
a	12	40
b	15	45
c	18	60

$$\frac{a \times 40}{12} = \frac{b \times 45}{15} = \frac{c \times 60}{18}$$

Simplificando

$$\frac{a \times 10}{3} = \frac{b \times 3}{1} = \frac{c \times 10}{3}$$

Dividimos entre $MCM(10; 3) = 30$

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{10} = \frac{c}{9} = k$$

Reemplazando: $9k + 10k + 9k = 8400$

$$28k = 8400$$

$$k = 300$$

∴ Las partes son:

$$a = 9 \times 300 = 2700$$

$$b = 10 \times 300 = 3000$$

$$c = 9 \times 300 = 2700$$

REGLA DE COMPAÑÍA

Tiene por objetivo repartir un beneficio (ganancia) entre cierto número de socios.

Se relacionan las magnitudes: ganancia, capital, tiempo.

(Ganancia) DP (Capital) ; Tiempo: constante

(Ganancia) DP (Tiempo) ; Capital: constante

Con respecto a sus valores, se cumple:

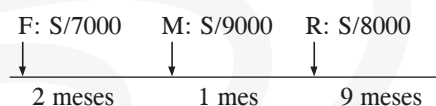
$$\frac{\text{(Ganancia)}}{\text{(Capital)(Tiempo)}} = k$$

Ejemplo

Fernanda abre su negocio con S/7000 y a los dos meses acepta a Mary como socia y esta aporta S/9000. Un mes después Ritz se une al negocio aportando S/8000. Si al año de iniciado el negocio se decide liquidarlo con una ganancia de S/3280, ¿cuánto ganó Fernanda?

Resolución

Observe:



$$\text{Dato: } S/3280 = G_F + G_M + G_R$$

$$\text{Sabemos: } \frac{\text{(Ganancia)}}{\text{(Capital)(Tiempo)}} = \text{cte.}$$

$$\frac{G_F}{(7000)(12)} = \frac{G_M}{(9000)(10)} = \frac{G_R}{(8000)(9)}$$

Simplificando

$$\frac{G_F}{14} = \frac{G_M}{15} = \frac{G_R}{12} = k$$

$$\text{Ahora: } 3280 = 14k + 15k + 12k = 41k$$

$$k = 80$$

$$\therefore G_F = 14 \times 80 = S/1120$$



Anotación

Si en una compañía, en lugar de ganancia se genera pérdida, ésta también sería repartida entre los socios de manera proporcional al capital y al tiempo de permanencia de éstos, es decir:

$$\frac{\text{(Pérdida)}}{\text{(Capital)(Tiempo)}} = k$$

REGLA DE TRES

Se considera una magnitud de referencia, luego se relaciona con las demás magnitudes de dos en dos, asumiendo que las otras magnitudes permanecen constantes.

Ejemplo

En 48 días, 15 obreros han hecho $\frac{1}{5}$ de una obra. ¿Cuántos días emplearán 24 obreros triplemente hábiles en terminar dicha obra?

*Resolución***Del enunciado**

15 obreros	24 obreros
Eficiencia: 1	Eficiencia: 3
48 días	x días
1	4
5	

Observe:

(Número de días) IP (Número de obreros)

(Número de días) IP (Eficiencia)

(Número de días) DP (Obra)

Ahora

$$\frac{\left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{días} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{obrerros} \end{array} \right) (\text{Eficiencia})}{(\text{Obra})} = k$$

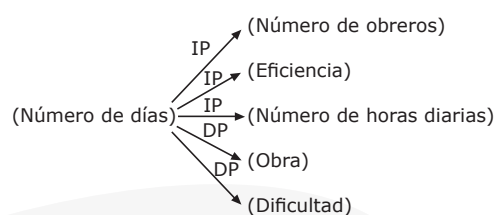
$$\rightarrow \frac{(48)(15)(1)}{(1)} = \frac{(x)(24)(3)}{(4)}$$

$$720 = 18x$$

$$\therefore x = 40$$

**Anotación**

Para problemas de obras, tenga en cuenta:

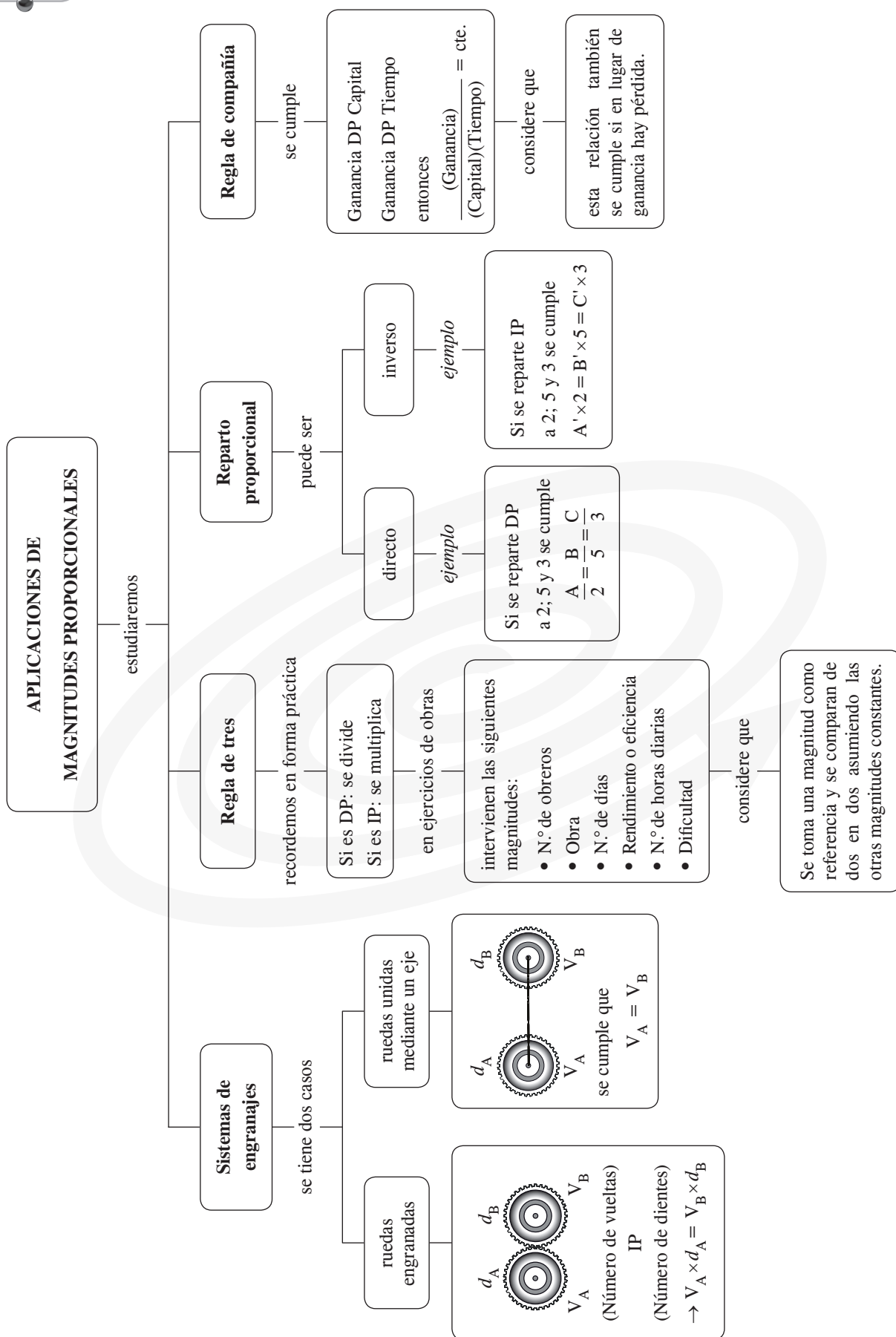


Luego, respecto a sus valores:

$$\frac{\left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{días} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{obrerros} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{horas diarias} \end{array} \right) (\text{Eficiencia})}{(\text{Obra})(\text{Dificultad})} = \text{cte.}$$



Helicósinthesis





Problemas resueltos

1. Para construir un puente de 600 m se ha contratado 30 obreros para trabajar 12 días en jornadas de 10 horas pero una nueva decisión técnica exige que el puente sea de 900 m, para ello se contratan 6 obreros más. ¿En cuántos días se construirá el puente con los 36 obreros en jornadas de 6 horas diarias? (UNI 2004-II)

Resolución

Se sabe

$$\frac{\left(\begin{array}{c} \text{Número} \\ \text{de días} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \text{Número} \\ \text{de obreros} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \text{Número} \\ \text{de horas diarias} \end{array}\right)}{(\text{obra})} = \text{cte.}$$

Número de días	12	x
Número de obreros	30	36
Número de horas diarias	10	6
Obra (m)	600	900

$$\text{Ahora: } \frac{(12)(30)(10)}{(600)} = \frac{(x)(36)(6)}{(900)}$$

$$\therefore x = 25$$

Rpta.: 25

2. Un grupo de 6 alumnos resuelve en 5 horas una tarea consistente en 10 problemas de igual dificultad. La siguiente tarea consiste en resolver 4 problemas cuya dificultad es el doble que la de los anteriores. Si no se presentan 2 integrantes del grupo, entonces los restantes alumnos terminarían la obra en (UNI 2000-I)

Resolución

Se sabe

$$\frac{(\text{Número de horas})(\text{Número de alumnos})}{(\text{Número de problemas})(\text{dificultad})} = \text{cte.}$$

Número de horas	5	x
Número de alumnos	6	4
Número de problemas	10	4
Dificultad	1	2

$$\text{Ahora: } \frac{(5)(6)}{(10)(1)} = \frac{(x)(4)}{(4)(2)}$$

$$\therefore x = 6$$

Rpta.: 6h.

3. Un padre deja una herencia a sus tres hijos. La reparte en partes inversamente proporcionales a los números 6; 4 y 3 empezando por el hijo mayor, respectivamente. Si el valor de la herencia asciende a 36 000 dólares, ¿cuánto le corresponde al hijo menor? (UNI 2005-I)

Resolución

Observe:

Hijo	Parte	Índice de reparto
1	A	6
2	B	4
3	C	3

Reparto IP

$$(A)(6) = (B)(4) = (C)(3)$$

Dividimos entre MCM(6; 4; 3) = 12

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = k$$

Dato: $A + B + C = \$36\,000$

Ahora: $2k + 3k + 4k = 36\,000 \rightarrow k = 4\,000$

$$\therefore C = 4(4\,000) = \$16\,000$$

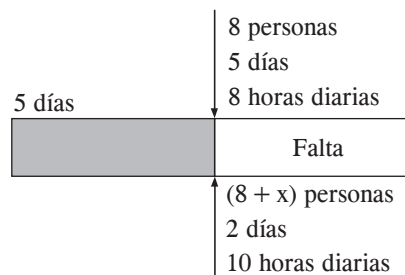
Rpta.: \$16 000

4. Para pintar el Estadio Nacional se contratan 8 personas que afirman terminar la obra en 10 días, laborando 8 horas diarias. Al terminar el quinto día de trabajo se decide incrementar la jornada a 10 horas diarias y contratar más personas para culminar el resto de la obra en 2 días. Halle la cantidad de personas que se debe contratar en forma adicional. (UNI 2010-II)

Resolución

Observe:

8 personas, 10 días, 8 horas diarias



Sabemos:

(Número de personas)(Número de días)(Número de horas diarias) = cte.

Ahora: $(8)(5)(8) = (8+x)(2)(10)$

$$16 = x + 8$$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: 8

5. Tres socios A, B y C deberían repartirse una utilidad de M dólares proporcionales a sus edades las cuales son x del socio A, $(x-3)$ del socio B y $(x-6)$ del socio C. Como el reparto se realizó un año después, halle la cantidad que recibe el socio que más se perjudica. (UNI 2009-II)

Resolución

Socio	Edad hoy	Edad dentro de 1 año
A	x	$x + 1$
B	$x - 3$	$x - 2$
C	$x - 6$	$x - 5$

Primer reparto:

$$\frac{P}{x} = \frac{Q}{x-3} = \frac{R}{x-6} = \frac{P+Q+R}{3(x-3)} = \frac{M}{3(x-3)}$$

Segundo reparto:

$$\frac{P'}{x+1} = \frac{Q'}{x-2} = \frac{R'}{x-5} = \frac{P'+Q'+R'}{3(x-2)} = \frac{M}{3(x-2)}$$

Homogenizando la utilidad total

$$\frac{P}{x(x-2)} = \frac{Q}{(x-3)(x-2)} = \frac{R}{(x-6)(x-2)} = \frac{M}{3(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{P'}{(x+1)(x-3)} = \frac{Q'}{(x-2)(x-3)} = \frac{R'}{(x-5)(x-3)} = \frac{M}{3(x-2)(x-3)}$$

$\therefore$ Quien más se perjudica es el primer socio(a), quien recibe

$$P' = (x+1)(x-3) \times \frac{M}{3(x-2)(x-3)}$$

$$P' = \frac{M(x+1)}{3(x-2)}$$

$$\text{Rpta.: } \frac{M(x+1)}{3(x-2)}$$



Helicopráctica

Nivel I

1. Se tiene tres ruedas, A, B y C, cuyas cantidades de dientes están en la relación de 5; 3 y 4, respectivamente. Halle el número de vueltas que da la rueda A cuando la rueda C da 30 vueltas si se sabe que A y B están engranadas y C está unida por un mismo eje con B.

Resolución

3. Verónica forma una empresa con S/4000. A los 3 meses acepta a Daniel como socio, quien aportó S/2000 y 2 meses más tarde se incorporó Katherine con S/6000. Si el negocio duró un año y la ganancia total de la empresa es de S/7200, determine la diferencia de ganancias de Daniel y Katherine.

Resolución

2. Se reparte la cantidad de S/63 000 proporcionalmente a los números 2^{2019} , 2^{2020} y 2^{2021} . Determine la mayor diferencia de las partes repartidas.

Resolución

4. Se contrataron 24 obreros para construir un túnel, y faltando 15 días para terminarlo 4 de los obreros sufrieron un accidente y se retiraron de la obra. Halle cuántos días tardarán los obreros restantes en culminar lo que falta de la obra.

Resolución

Nivel II

5. Tres ruedas engranadas A, B y C tienen 20; 30 y 60 dientes, respectivamente, además, C y O están unidas por un mismo eje y esta última engrana con E, la cual tiene una cantidad de dientes que es $\frac{5}{3}$ de la de O. Si en 10 minutos A da 20 vueltas más que B, ¿cuántas vueltas hubiera girado E si A habría girado durante 15 minutos?

Resolución

6. Un padre decide repartir entre sus tres hijos S/7900 en forma proporcional a sus notas y a sus edades, e inversamente proporcional al número de veces que llegaron tarde al colegio. Considere los datos del siguiente cuadro:

Hijo	Nota	Edad	Tardanzas
A	16	12	4
B	12	10	6
C	18	15	3

Halle cuánto dinero le tocó al menor de los hijos.

Resolución

7. Una obra deberá terminarse en 30 días empleando 20 obreros trabajando 8 horas diarias. Después de 12 días de trabajo se pidió que la obra quedase terminada 6 días antes del plazo y así se hizo. ¿Cuántos obreros se aumentaron, teniendo presente que se aumentó también en dos horas el trabajo diario?

Resolución

8. Freddy, Armando y Enrique se asocian para iniciar un negocio, aportando 2000; 5000 y 6000 soles. Faltando dos meses para liquidar el negocio se retira Armando y un mes antes lo hizo Enrique. Si el negocio presentó pérdidas por 20 600 soles del cual Freddy afrontó 3600 soles, ¿cuánto tiempo duró el negocio (en meses)?

Resolución

Nivel III

9. La quinta parte de una obra se realizó en 10 días con 20 obreros trabajando 6 horas diarias. Indique en cuántos días se hubiera hecho todo el trabajo si se hubiera contado con 15 obreros de doble rendimiento que los anteriores y trabajando 2 horas más por día que el otro grupo.

Resolución

10. En una isla hay n hombres con cierta cantidad de víveres, cada 5 días perecen dos naufragos, además se sabe que los últimos 5 días quedaba tan solo un naufrago, el cual podría haber consumido todo en 245 días. Calcule la suma de la cantidad de hombres que consumirían todo en 35 días más el valor de n .

Resolución

11. Juan inicia un negocio con S/6000 de capital y luego de tres meses se asocia con Pedro, quien aporta S/5000. Al cabo de cinco meses de iniciado el negocio, Juan retiró S/2000 y un mes después Pedro sacó S/2000. Si el negocio duró un año y se reparten sus utilidades de S/7280, ¿cuánto le corresponde a Pedro?

Resolución

12. El gerente de una empresa decide repartir una cantidad de dinero entre tres de sus obreros. Realiza la repartición según la cantidad de artículos producidos y el número de tardanzas que han tenido en el último mes. Dicha información se muestra en la siguiente tabla:

Obreros	Artículos producidos	Tardanzas
Antonio	150	10
Braulio	180	15
Pumpín	160	8

Si la diferencia entre la mayor y menor parte repartida es S/240, ¿cuánto es la cantidad total repartida?

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Tres ruedas A, B y C, que están engranadas, tienen 81; 54 y 135 dientes, respectivamente, además se sabe que la rueda C está unida mediante un eje con otra rueda D. Si en total todas las ruedas dan 1850 vueltas, calcule la diferencia entre el número de vueltas de las dos primeras ruedas.

Resolución

3. César, Augusto y Ricardo inician un negocio en el que aportan S/8400; S/4800 y S/9600, respectivamente. Al cabo de 9 meses se retira Augusto y 3 meses después hace lo mismo Ricardo, pero César se queda hasta el final y liquida el negocio. Determine la cantidad que le corresponde a Augusto si la ganancia total obtenida es de S/3555 y el negocio duró 15 meses.

Resolución

Nivel II

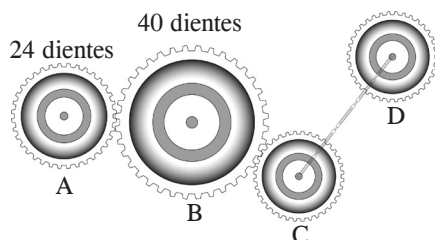
2. Reparta 9000 en forma proporcional a todos los números de dos cifras que sean múltiplos de 10. Dé como respuesta la parte que le corresponde a 80.

Resolución

4. Faltando 45 días para que culmine cierta obra, se despide a 12 obreros y cuando faltan 10 días para que se cumpla el plazo, se contrata n obreros y así se entregó la obra en el plazo fijado. Calcule el producto de las cifras de n .

Resolución

5. Un sistema de engranajes consta de cuatro ruedas, tal como se muestra en la figura.



Se sabe que al cabo de 10 minutos de haber empezado a funcionar el sistema de engranajes, el número de vueltas que da la rueda A excede en 60 a las que da D y en 5 minutos la rueda B da en total 90 vueltas. ¿Cuántos dientes tiene la rueda C?

Resolución

6. Un padre dispone distribuir una herencia en partes proporcionales a las edades que son 5; 6 y 7. Primero hace la distribución en partes directamente proporcionales y después en partes inversamente proporcionales; con el segundo reparto uno de ellos fue beneficiado con S/442. ¿Cuál es el monto de la herencia?

Resolución

Nivel III

7. Cuarenta obreros y 2 máquinas realizaron el asfaltado de una pista en 18 días trabajando 9 horas por día. ¿En cuántos días hubieran terminado ese mismo trabajo si hubieran sido 60 obreros y una máquina trabajando 6 horas por día. Considere que el trabajo de una máquina equivale al de 30 obreros.

Resolución

8. Úrsula y Francis comenzaron un negocio con S/5000 y S/8000, respectivamente. Luego de 4 meses, Úrsula adiciona S/3000 a su capital y 2 meses después de este, Francis retira S/3000 de su capital. Si el negocio duró 2 años, al término del cual se obtuvo una ganancia de S/3180, halle la diferencia de las ganancias.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Las ruedas A, B, C y D cuyo número de dientes son 72; 36; 48 y n , respectivamente, se encuentran engranadas en ese orden; además, en 5 minutos las ruedas A y B dan un total de vueltas equivalente a las vueltas que da la rueda D en ese tiempo. Halle el valor de n .

A) 12 B) 32 C) 18
D) 24 E) 36

2. Carmen desea repartir S/480 de forma DP a los números 3; 4 y 5, e IP a los números 6; 12 y 18. Halle la menor de las partes.

A) 216 B) 144 C) 126
D) 120 E) 210

Nivel II

3. Tres personas forman una empresa aportando S/792; S/924 y S/1056. Si después de cierto tiempo se liquidó la empresa y el socio que menos aportó se retiró con S/1242, ¿cuánto fue la ganancia del socio que aportó más dinero?

A) S/600 B) S/450 C) S/750
D) S/800 E) S/900

4. Un granjero posee 300 patos, y tiene suficiente alimento para 3 semanas. Sin embargo, decide vender n patos, y para que el alimento le dure 9 semanas más, disminuye la ración diaria a los $\frac{3}{5}$ de la original. ¿Cuántos patos vendió?

A) 100 B) 125 C) 150
D) 175 E) 200

Nivel III

5. Un padre decide repartir su terreno a sus tres hijos cuyas edades son 16; 18 y 24 años. Inicialmente pensó hacer el reparto proporcional a sus edades pero se equivocó y hace el reparto en razón inversa a sus edades con lo cual al mayor le toca $36\,720\text{ m}^2$. Debido a esto el padre decide hacer un reparto equitativo. ¿Cuántos m^2 de terreno debe quitarle al hijo menor?

A) 7420 B) 8160 C) 9450
D) 9820 E) 10250



Test 2

Nivel I

1. Sean las ruedas A, B, C y D, donde A y B están engranadas, B y C están unidas por un eje, C y D están engranadas y sus números de dientes están en relación de 3; 4; 5 y 7. Si la diferencia de vueltas entre A y D es 130, determine cuántas vueltas da la rueda C.

A) 200 B) 210 C) 220
D) 230 E) 240

2. Reparta 8000 en forma directamente proporcional a las inversas de los números 10; 20 y 60 e indique la mayor de las partes.

A) 2400 B) 3600 C) 3000
D) 3800 E) 4800

Nivel II

3. Al repartir N en forma inversamente proporcional a 3; 15; 35; 63; ...; 5775, se obtiene que la cuarta parte es 2200. Halle el valor de N.

A) 63 000 B) 65 700 C) 68 400
D) 72 000 E) 73 800

4. Una brigada de 30 obreros se compromete hacer 30 m de una zanja en 30 días. A los 5 días de empezado el trabajo se aumenta 5 obreros y 10 días después se aumenta 5 obreros más. ¿Cuál es el tiempo, en días, empleado en hacer la obra?

A) 20 B) 21 C) 25
D) 27 E) 28

Nivel III

5. Un socio A forma una empresa con un capital de S/10 000, después de un mes acepta a un socio B que aporta S/9000 y un mes después aceptan a un tercer socio C que aporta S/8000. Si después de t meses de formada la empresa se liquida, encontrándose que la ganancia de C es el 75 % de la ganancia de A, entonces t es igual a
- A) 18. B) 16. C) 24.
D) 32. E) 40.



Helicodesafío

1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
- I. Si una cantidad se reparte en forma proporcional a los elementos de una proporción aritmética continua, una de las partes es la media aritmética de las otras dos.
- II. Si una cantidad se reparte en forma proporcional a los elementos de una proporción geométrica continua, una de las partes es la media geométrica de las otras dos.
- III. Si una cantidad se reparte proporcionalmente a números que forman una proporción armónica continua, las partes también forman una proporción armónica continua.
- A) Todas B) I y II C) II y III
D) I y III E) Ninguna
2. Una herencia se debe repartir entre tres hermanos, cuyas edades son $(a-6)$; a y $(a+6)$ años. Si el reparto se realizará dentro de 6 años, el menor recibiría S/4500, pero si el reparto se hubiese realizado hace 6 años, el mayor recibía S/6750. ¿A cuántos asciende la herencia repartida?
- A) S/10 800 B) S/12 600 C) S/15 300
D) S/16 200 E) S/18 000
3. El dinero que han aportado dos socios; A y B, están en relación de $\frac{x}{4}$. Al cabo de y meses ingresa el socio C hasta el final y cuyo dinero es al de B como 5 es a 4. Si se sabe que B por permanecer 8 meses ha ganado S/320 000, que la sociedad se disolvió al cabo de 10 meses de creada, obteniendo una utilidad de S/1 470 000 y que $x-y=5$, ¿cuántos meses ha permanecido el socio C?
- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9
4. Un grupo de a obreros en n días ha realizado la mitad de una obra. Después de n días, otro grupo de b obreros ha realizado la tercera parte de la obra que faltaba y luego de n días más, un grupo de c obreros ha hecho la cuarta parte de la obra que aún faltaba. Si trabajan juntos los $(a+b+c)$ obreros para finalizar la obra, ¿en cuántos días la terminarán?
- A) $\frac{n}{18}$ B) $\frac{n}{12}$ C) $\frac{n}{6}$
D) $\frac{n}{24}$ E) $\frac{n}{3}$
5. Un obrero debe hacer una obra en un tiempo dado trabajando cierta jornada diaria, a determinado rendimiento. El primer día trabajó solo media jornada; el segundo día trabajó un tercio de la jornada a solo la mitad de su rendimiento; el tercer día trabajó un cuarto de su jornada a solo la tercera parte de su rendimiento y así sucesivamente. ¿Cuánto tiempo, en días, se retrasó la entrega de la obra si en el último día se hizo $\frac{1}{36}$ de toda la obra?
- A) $2\frac{1}{5}$ B) 4 C) $4\frac{1}{3}$
D) $5\frac{1}{7}$ E) $5\frac{1}{4}$

ÁLGEBRA



ÁLGEBRA



Objetivos

- Reconoce un polinomio y sus respectivos elementos.
- Estudia el grado de polinomios y los polinomios especiales.



Sabías que...

Historia de los Polinomios

La resolución de ecuaciones algebraicas, o la determinación de las raíces de polinomios, está entre los problemas más antiguos de la matemática. Sin embargo, la elegante y práctica notación que utilizamos actualmente se desarrolló a partir del siglo XV.

En el problema 14º del papiro de Moscú (1890 a. C.) se pide calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular. El escriba expone los pasos: eleva al cuadrado 2 y 4, multiplica 2 por 4, suma los anteriores resultados y multiplícalo por un tercio de 6 (h); finaliza diciendo: «ves, es 56, lo has calculado correctamente». En notación algebraica actual sería: $V = h(t^2 + b^2 + tb) / 3$, un polinomio de cuatro variables (V, h, t, b) que, conociendo tres, permite obtener la cuarta variable.



Girolamo Cardano

Algunos polinomios, como $f(x) = x^2 + 1$, no tienen ninguna raíz que sea número real. Sin embargo, si el conjunto de las raíces posibles se extiende a los números complejos, todo polinomio (no constante) tiene una raíz: ese es el enunciado del teorema fundamental del álgebra.

Hay una diferencia entre la aproximación de raíces y el descubrimiento de fórmulas concretas para ellas. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta cuarto grado desde el siglo XVI (ver ecuación cuadrática, Girolamo Cardano). Pero, las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de quinto grado o mayores (ver el teorema de Abel-Ruffini). Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se ocupa del estudio detallado de las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios.

La máquina diferencial de Charles Babbage fue diseñada para crear automáticamente tablas de valores de funciones logarítmicas y diferenciales, evaluando aproximaciones polinómicas en muchos puntos, usando el método de las diferencias de Newton.





Helicoteoría

POLINOMIOS

MONOMIO

Es aquella expresión algebraica que presenta la siguiente forma

- En una variable

$$M(x) = ax^n$$

$\uparrow$ variable $\uparrow$ coeficiente ($a \neq 0$) $\leftarrow$ Exponente entero no negativo

Ejemplos: $3x^2$; $-\frac{1}{2}x^5$; $\sqrt{2}x^3$; 8

Observación

Una constante distinto de cero, es un monomio.

- En dos variables

$$M(x, y) = ax^n y^m$$

$\uparrow$ variables $\uparrow$ coeficiente ($a \neq 0$) $\leftarrow$ Exponentes entero no negativo

Ejemplos: $3x^2y^5$; $-\frac{1}{5}xy^3$; $\sqrt{3}x^4y$

- En tres variables

$$M(x, y, z) = ax^n y^m z^p$$

$\uparrow$ variables $\uparrow$ coeficiente ($a \neq 0$) $\leftarrow$ Exponentes entero no negativo

Ejemplos: $-3x^2y^4z^3$; $2xyz$; $-\frac{2}{5}xy^2z^5$

y así, en general tenemos un monomio con n variables.

$$M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Donde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son las variables

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ exponentes (números enteros no negativos)

a : coeficiente ($a \neq 0$)

Anotación

$$M(x, y) = \underbrace{-3}_{\text{Parte constante (coeficiente)}} \underbrace{x^4 y^7}_{\text{Parte variable}}$$

MONOMIO SEMEJANTES

Son aquellos monomio que tienen la misma parte variable.

Ejemplos

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 8x^2y^5 \\ N(x, y) &= -3x^2y^5 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Tienen la misma} \\ \leftarrow \text{parte variable} \end{array} \right\}$$

→ Los monomios $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son semejantes.

Observación

$$M(x, y) + N(x, y) = 5x^2y^5$$

$$M(x, y) - N(x, y) = 11x^2y^5$$

Al sumar o restar monomios semejantes puede resultar otro monomio semejante o puede ser nulo.

POLINOMIO

Es aquella expresión algebraica que resulta de una suma finita de monomios.

Ejemplos

- Monomios: $3x^2$; $-5x$; 1

Al sumar obtenemos $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Es un polinomio con tres términos ($3x^2$; $-5x$ y 1) esto es un trinomio

- Monomios: xy^2 ; $-\frac{1}{2}x^4$; $6xy^2$

Al sumar obtenemos: $F(x, y) = \underbrace{xy^2 - \frac{1}{2}x^4 + 6xy^2}_{\text{semejantes}}$

$$F(x, y) = 7xy^2 - \frac{1}{2}x^4$$

Es un polinomio con dos términos ($7xy^2$, $-\frac{1}{2}x^4$) esto es un binomio.

Anotación

- $(3x^2) + (5x^2) + (-2x^2) = 6x^2 \leftarrow$ Monomio
Suma de monomios Polinomio
Todo monomio es un polinomio

- $(3x^2) + (-5x^2) + (2x^2) = 0 \leftarrow P(x)$
Suma de monomios Polinomio

→ $P(x) = 0$ es un polinomio, se conoce como el polinomio nulo.

POLINOMIOS DE UNA VARIABLE

Forma general

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n; a_0 \neq 0$$

donde

 x : variable n : grado de $P(x)$ (mayor exponente)

$$\underbrace{a_0}_{\text{Coeficiente principal (CP)}}; \underbrace{a_1}_{\text{Coeficiente}}; \underbrace{a_2, \dots, a_n}_{\text{Coeficientes}}$$

a_0x^n es el término independiente (TI)

cuando $a_0 = 1$ el polinomio es mónico.SUMA DE COEFICIENTES (Σ coef)

$$\Sigma \text{ coef} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Ejemplo

$$P(x) = 4x + 3x^4 - 2x^3 - 1$$

Grado
CP TI

Sus términos son: $4x$, $3x^4$, $-2x^3$, -1 , tiene cuatro términos.

$$\Sigma \text{ coef} = 4 + 3 + (-2) + (-1) = 4$$

 ObservaciónPara el polinomio $P(x)$, tenemos:

$$x=1 \rightarrow P(1) = 4 + 3 + (-2) + (-1) = \Sigma \text{ coef}$$

$$x=0 \rightarrow P(0) = -1 = \text{TI}$$

TEOREMA

Sea P un polinomio, se cumple:

1. $\Sigma \text{ coef} = P(1)$

2. $\text{TI} = P(0)$

CASOS PARTICULARES

1. $P(x) = k$; k es una constante (Polinomio constante)

2. $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$ (Polinomio lineal)

3. $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (Polinomio cuadrático)

4. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ (Polinomio cúbico)

GRADOS DE POLINOMIOS

- Si el polinomio es de una variable, el grado será el mayor exponente de la variable.

Ejemplo

$$P(x) = 3x^2 - 5x^4 + \frac{1}{2}x^5 + 7x + 3$$

Grado (mayor exponente de x)
variable

- Si tenemos un monomio de dos o más variables, el grado se obtiene sumando los exponentes de las variables

Ejemplo

$$M(x, y) = -5x^3y^8$$

Suma = 11 = Grado de M .
variables

 ObservaciónEl grado de M también es llamado grado absoluto.

Además, tenemos para cada variable su respectivo grado relativo (GR)

$$\text{GR}(x) = 3 \text{ (exponente de } x\text{)}$$

$$\text{GR}(y) = 8 \text{ (exponente de } y\text{)}$$

 Observación

En el monomio se cumple

$$\text{Grado}(M) = \text{GR}(x) + \text{GR}(y)$$

En general, el grado de un monomio de dos o más variables, viene dado por la suma de todos los grados relativos del monomio.

- Si tenemos un polinomio de dos o más variables y con dos o más términos entonces el término de mayor grado indica el grado del polinomio.

Ejemplo

$$P(x, y) = \underbrace{2x^3y^7}_{\text{Grado}=10} - \underbrace{7x^4y^5}_{\text{Grado}=9} + \underbrace{\sqrt{2}x^6y^6}_{\text{Grado}=12}$$

$$\text{Grado}(P) = 12 = \text{GA}$$

Grado absoluto

Mayor grado entre todos los términos del polinomio.

Además tenemos

$$\text{GR}(x) = 6 \text{ (Mayor exponente de } x\text{)}$$

$$\text{GR}(y) = 7 \text{ (Mayor exponente de } y\text{)}$$

POLINOMIOS ESPECIALES

1. Polinomio homogéneo

Un polinomio de dos o más variables y con dos o más términos es homogéneo si cada uno de sus términos presenta el mismo grado absoluto.

Ejemplo

$$P(x, y) = \underbrace{4x^5y^3}_{\text{Grado}=8} - \underbrace{7x^4y^4}_{\text{Grado}=8} + \underbrace{x^7y}_{\text{Grado}=8}$$

Vemos que cada término (monomio) tiene el mismo grado absoluto.

$P(x, y)$ es un polinomio homogéneo.



Observación

GA = 8 = Grado de homogeneidad

2. Polinomio completo

Un polinomio es completo respecto a alguna variable si presenta términos de todos los grados, incluyendo el término independiente, hasta el grado que presenta el polinomio respecto a dicha variable.

Ejemplo

$$P(x) = \underbrace{x}_{\text{Grado}=1} + \underbrace{x^3}_{\text{Grado}=3} - \underbrace{5x^2}_{\text{Grado}=2} + \underbrace{1}_{\text{TI}}$$

Vemos que al polinomio $P(x)$ no le falta términos. esto indica que es completo.

$$F(x) = \underbrace{x^2 - 8x^4 + x^3 - 2x}_{\text{No es completo, le falta el T.I.}}$$



Anotación

Un polinomio completo de grado n tiene exactamente $n+1$ términos.

3. Polinomio ordenado

Un polinomio es ordenado cuando hay un orden ascendente (creciente) o descendente (decreciente) de los exponentes de la variable.

Ejemplo

$$P(x) = \underbrace{x^3}_{\text{Grado}=3} - \underbrace{5x^6}_{\text{Grado}=6} + \underbrace{\sqrt{7}x^{10}}_{\text{Grado}=10}$$

asciende asciende

El polinomio $P(x)$ es ordenado en forma ascendente o creciente.

$$F(x) = \underbrace{x^5}_{\text{Grado}=5} - \underbrace{3x^4}_{\text{Grado}=4} + \underbrace{x^2}_{\text{Grado}=2} - \underbrace{7x}_{\text{Grado}=1}$$

Desciende Desciende Desciende

El polinomio $F(x)$ es ordenado en forma descendente o decreciente.

4. Polinomio completo y ordenado

Ejemplo

$$P(x) = \underbrace{2x^4}_{\text{Término principal}} - 5x^3 + \sqrt{5}x^2 + \pi x + \underbrace{7}_{\text{Término independiente}}$$

Es completo y ordenado en forma descendente. Los exponentes disminuyen de uno en uno desde el término principal hasta el término independiente. $GA(P)=4$, tiene 5 términos.

$$F(x) = \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{Término independiente}} - 3x + \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{5x^3}_{\text{Término principal}}$$

Es completo y ordenado en forma ascendente. Los exponentes aumentan de uno en uno desde el término independiente hasta el término principal. $GA(F)=3$, tiene 4 términos.



Observación

Todo polinomio completo y ordenado de grado n tiene $n+1$ términos.



Anotación

Existen polinomios que no son completos ni ordenados.

Ejemplo

$$P(x) = 3x^2 - 4x^5 + 7x + 1$$

5. Polinomios idénticos

Dos polinomios son idénticos o iguales si presentan el mismo grado y los términos que son semejantes tienen los mismos coeficientes.

Notación: $P(x) \equiv Q(x)$

Se lee: $P(x)$ es idéntico a $Q(x)$



Anotación

$$\begin{aligned} & \bullet (a-1)x^3 + (b+2)x + c \equiv 2x^3 + 4x + 7 \\ & \rightarrow \underbrace{a-1=2}_{(a=3)} \wedge \underbrace{b+2=4}_{(b=2)} \wedge (c=7) \end{aligned}$$



Anotación

• Si P es idéntico a Q , se cumple que $P(a) = Q(a)$ para cualquier valor que se le asigne a su variable.

6. Polinomio idénticamente nulo

Notación: $P(x) \equiv 0$

Se lee: el polinomio $P(x)$ es idénticamente nulo.



Observación

Al polinomio idénticamente nulo también se le llama polinomio nulo o polinomio cero.

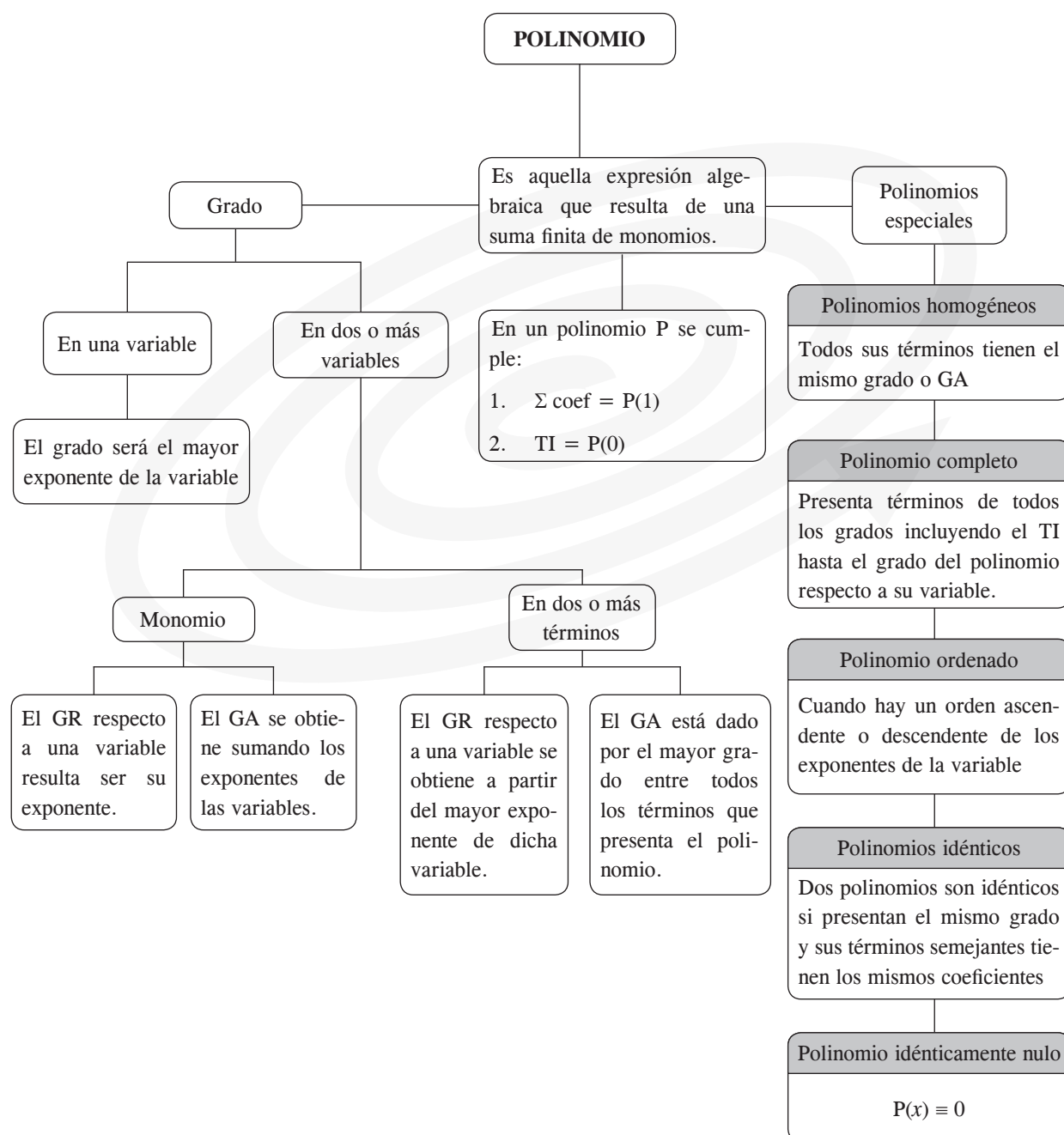


Anotación

- $P(x) = (2a-1)x^2 + (b+1)x + c - 2$ es idénticamente nulo
 $\rightarrow P(x) = (2a-1)x^2 + (b+1)x + c - 2 \equiv 0x^2 + 0x + 0$
 $\rightarrow \underbrace{2a-1=0}_{a=\frac{1}{2}} \wedge \underbrace{b+1=0}_{b=-1} \wedge \underbrace{c-2=0}_{c=2}$
- $P(x) \equiv 0 \rightarrow P(a)=0$ para todo valor que se le asigne a x .



Helicóptesis





Problemas resueltos

1. El grado del polinomio

$$P(x) = nx^{n^2-n} - n^5x^{725} + n^3 \text{ es } 729$$

Calcule $P(n)$.

- A) 27 B) 25 C) 24
D) 22 E) 20

Resolución

El grado del polinomio lo determina el mayor exponente.

$$\rightarrow n^{n^2-n} = 729 \rightarrow n^{n^2-n} = 3^6 = 3^{3^2-3} \rightarrow n=3$$

$$\text{Luego } P(n) = P(3) = \underbrace{3 \times 3^{729}}_{3^{730}} - \underbrace{3^5 \times 3^{725}}_{3^{730}} + 3^3$$

$$\rightarrow P(n) = P(3) = 27$$

Rpta.: 27

2. Se tiene un polinomio $P(x)$ cuadrático y mónico, cuyo coeficiente del término lineal es el triple del término independiente. Calcule $P(-4)$ si se sabe que $P(2) = 32$.

- A) -60 B) -48 C) -36
D) -28 E) -24

Resolución

Sea el polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\rightarrow P(x) = x^2 + 3cx + c \quad (*)$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1 & 3c \\ \hline \text{Dato} \end{array}$

$$(x=2) \rightarrow P(2) = 4 + 6c + c = 32$$

$$\rightarrow c = 4$$

$$\text{En } (*) P(x) = x^2 + 12x + 4$$

$$\rightarrow P(-4) = (-4)^2 + 12(-4) + 4 = -28$$

Rpta.: -28

3. Sea el polinomio

$$P(x-1) = (2x-3)^{2n} + (3x-2)^{2n} - 32(x-2)$$

La suma de sus coeficientes es la mitad de su término independiente. Halle el valor de n .

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

$$\text{Dato: } \Sigma \text{ coef} = \frac{\text{TI}}{2} \rightarrow \text{TI} = 2 \Sigma \text{coef. } (*)$$

Por teoría, se cumple:

$$\Sigma \text{coef} = P(1) \quad \wedge \quad \text{TI} = P(0)$$

$$\rightarrow \underbrace{x-1}_{\text{variable}} = 1 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Reemplazamos: } P(1) = (1)^{2n} + (4)^{2n} - 32(0)$$

$$\rightarrow P(1) = 4^{2n} + 1 = \Sigma \text{coef}$$

$$\rightarrow \underbrace{x-1}_{\text{variable}} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{Reemplazamos: } P(0) = (-1)^{2n} + (1)^{2n} - 32(-1)$$

$$\rightarrow P(0) = 34 = \text{TI}$$

Reemplazamos (*):

$$34 = 2(4^{2n} + 1) \rightarrow 17 = 4^{2n} + 1 \rightarrow 4^{2n} = 16 \rightarrow n=1$$

Rpta.: 1

4. Dado el trinomio homogéneo

$$P(x, y, z) = \sqrt{\pi} x^{m^m-10} - \frac{5}{3} x^{n+4} y^{n^2} + (n-2) x y^4 z^{n+3}$$

Halle el valor de m^m .

- A) -1 B) 1 C) 2
D) $\frac{1}{4}$ E) 4

Resolución

Como el polinomio $P(x, y, z)$ es homogéneo, cada término tiene el mismo grado.

$$\rightarrow \underbrace{m^m-10}_{(I)} = \underbrace{n+4+n^2}_{(II)} = \underbrace{1+4+n+3}_{(III)}$$

De (II) = (III):

$$n+4+n^2 = 1+4+n+3 \rightarrow n^2 = 4$$

$$\rightarrow \underbrace{n=2} \quad \text{y} \quad \underbrace{n=-2}$$

Reemplazando
 $P(x, y, z)$ resulta
un binomio

Reemplazando
 $P(x, y, z)$ resulta
un trinomio

$\rightarrow n = -2$ Cumple con la condición.

De (I) = (II):

$$m^m-10 = 6 \rightarrow m^m = 16 \rightarrow m^m = 2^{2^2}$$

$$\rightarrow m=2$$

$$\therefore m^n = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Rpta.: $\frac{1}{4}$

5. El polinomio

$$F(x) = 2x^{m^2-3n-4m} + x^{8m+25} + \dots + 2x^{p^2+p+1}$$

tiene $n+1$ términos, además es completo y ordenado. Halle el valor de p . ($p \in \mathbb{R}^+$)

- A) 10 B) 8 C) 6
D) 4 E) 2

Resolución

$$F(x) = 2x^{m^2-3n-4m} + x^{8m+25} + \dots + 2x^{p^2+p+1}$$

Como no especifican el orden, consideraremos dos casos.

1.º caso: orden descendente

$$\rightarrow p^2 + p + 1 = 0 \rightarrow 4p^2 + 4p + 4 = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{4p^2 + 4p + 1}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} + 3 = 0 \rightarrow (2p+1)^2 + 3 = 0$$

Trinomio
cuadrado
perfecto

Se observa que $p \notin \mathbb{R}$

Luego este caso queda descartado.

2.º caso: orden ascendente

$$\rightarrow \underbrace{m^2 - 3n - 4m = 0}_* \quad \text{y} \quad \underbrace{8m + 25 = 1}_{(m = -3)}$$

Reemplazando $m = -3$ en (*) : $n = 7$

Sabemos que: n.º de términos de $F(x) = GA(F) + 1$

$$\rightarrow \text{n.º de términos de } F(x) = (p^2 + p + 1) + 1 = n + 1$$

$$\rightarrow p^2 + p + 1 = 7 \rightarrow p^2 + p - 6 = 0$$

$$\begin{array}{c} p \quad \swarrow -2 \\ p \quad \searrow +3 \end{array}$$

$$\rightarrow (p-2)(p+3) = 0 \rightarrow p = 2 \quad \text{y} \quad p = -3$$

$$\text{Como } p \in \mathbb{R}^+ \rightarrow p = 2$$

Rpta.: 2



Helicopráctica

Nivel I

1. Si la siguiente expresión

$$P(x) = (2n-3)x^n - (3n-6)x^{m-3} + \frac{n+1}{3}x^{6-n} - (m-n)x^{5-m}$$

representa a un polinomio de cuatro términos de coeficientes enteros. Halle el valor de mn .

Resolución

2. La edad en años del niño Luisito, está dado por el coeficiente del término lineal del polinomio cuadrático y mónico $P(x)$, además se cumple que

$$P(x+1) = P(x) + nx + 5$$

Dentro de 15 años podemos afirmar con respecto a la edad de Luisito, lo siguiente:

- I. Será mayor de edad.
- II. Su edad no sobrepasará 20 años.
- III. Será mayor de 20 años
- IV. Su edad será un número primo.

Dé como respuesta el número de proposiciones correctas.

Resolución

3. Dado el polinomio:

$$P(x) = (a^3 - 8)x^3 + (b^2 - 8)x^2 + (3a + 2b)x + ab$$

es un binomio cuadrático y mónico. Calcule su término independiente.

Resolución

4. Sea los siguientes polinomios:

$$P(x+3) = 5x + 7 \text{ además } P(M(x)-3) = 15x + 2$$

calcule $P(M(1))$.

Resolución

Nivel II

5. Dado el polinomio P que cumple

$$P(x) = P(x-1) + P(x-2);$$

Calcule

$$\frac{P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(98)}{P(100) - P(1)}$$

Resolución

7. Si se cumple que

$$A(x-1)(x-3) + B(x-1)(x-5) + C(x-3)(x-5) \equiv 8x^2 - 40x + 24, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Indique de los enunciados correctos.

- a. $A+B+C=8$
- b. $A=B+3C$
- c. $A>B>C$

Resolución

6. Sea P un polinomio definido por

$$P(x) = (1+3x)^n + (2x+1)^n$$

cuya suma de sus coeficientes excede en 23 al término independiente, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- a. El polinomio es de grado 2. ()
- b. La suma de sus coeficientes es 24. ()
- c. El término cuadrático del polinomio es $12x^2$ ()

Resolución

8. El polinomio

$$P(x) = 2x^{m^2-3n-4m} + x^{8m+25} + \dots + 2x^{p^2+p+1}$$

Tiene $n+1$ términos, además es completo y ordenado.

Halle $p \in \mathbb{R}^+$.

Resolución

Nivel III

9. Dada la expresión $G(x+y) = G(x) + G(y)$
y $G(1) = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{11}$. Halle

$$\frac{G(2020)}{G(1010)}$$

Resolución

11. A partir de la relación $P^2(x) \cdot P\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$, Halle la expresión $P(x)$.

Resolución

10. Sea P un polinomio homogéneo de mínimo grado

$$P(x, y) = x^{a^2+2a+m} - x^{\frac{b^2}{6}} y^{a+1} + y^{\frac{b^2+30}{6}}; b \in \mathbb{Z}^+$$

Halle el valor de m .

Resolución

12. Si

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

donde $-1 < x < 1$, reduzca la siguiente expresión:

$$M = \frac{f(x+1) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$$

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. La siguiente expresión algebraica

$$M(x) = (2n-3)x^n - (3n-6)x^{m-3} + \frac{n+1}{3}x^{6-n} - (m-n)x^{5-m}$$

representa a un polinomio de cuatro términos con coeficientes enteros. Halle el valor de mn .

Resolución

3. Si el polinomio $P(x)$ no es cúbico, ni cuadrático pero si mónico, halle el término independiente.

$$P(x) = (a+b-5)x^3 + (b+c-6)x^2 + (c+a-8)x + a+b+c$$

Resolución

2. Sea $P(x)$ un polinomio cúbico que cumple

$$P(x-1) \equiv P(x) + x^2 - 2$$

además $P(2) = 16$, halle el TI.

Resolución

4. Si se cumple que

$$x^2 - 2f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

halle $f(2)$.

Resolución

Nivel II

Nivel III

5. Sabiendo que los polinomios

$$P(x, y) = 3x^{m^2-n^2}y^4 + 8x^3y^{mn}$$

$$Q(x, y) = x^{m^3}y^{n^3} - 3x^{m^2+n^2}y^{-mn}$$

son homogéneos, halle el valor de $\left(\frac{1-mn}{n-m}\right)$.

Resolución

7. Dado el polinomio

$$P(x^2 + x + 1) = x^5 + x + 1$$

Halle $P(0)$.

Resolución

6. Si $P(x) = (abd - abc + e^2)x^8 + (abc - bcd - 4e)x^4 + (bcd - adb + 3)$; sabiendo que $e > 1 \wedge P(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Halle el valor de $3a^{-1} - 4c^{-1} + d^{-1}$.

Resolución

8. Dado

$$F(5x-1) = 1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + \dots$$

determine $F\left(\frac{3}{2}\right)$.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Sea $P(x)$ un polinomio de grado par de modo que

$$P(x) = [(n+1)x - 1]^n - n(x^n - 1) + 2n$$
 la suma de coeficientes excede en uno al término independiente, ¿cuál es el valor de $P(n)$?

A) 2 B) 7 C) 8
 D) 15 E) 23

2. Sean P y Q dos polinomios de modo que

$$P(x+3) = 2x+5$$

$$P(Q(x)+2) = 6x+7$$

Halle la suma de coeficientes de $Q(x)$.

A) 1 B) 3 C) 5
 D) 7 E) 9

Nivel II

3. Sea $P(x, y)$ un polinomio homogéneo de grado de homogeneidad 2, si

$$P(4; 1) = 5, P(1; 0) = 1 \text{ y } P(2; 1) = -1$$

Determine la suma de los coeficientes de $P(x, y)$.

A) -2 B) -1 C) 0
 D) 1 E) 2

4. Halle el valor de p , si el polinomio

$$P(x) = x^{2n+1} + 5x^{p+3} - 8x^{m+2} + \dots + b$$

es completo y ordenado; además posee $2m$ términos.

A) 8 B) 5 C) 6
 D) 10 E) 7

Nivel III

5. Dado $P\left(\frac{2}{x}+3\right) = x$, determine

$$E = P(4) + P(5) + P(7) + P(11) + \dots$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{1}{4}$ E) 4



Test 2

Nivel I

1. Calcule la suma de coeficientes del polinomio completo $P(x)$. (Considere $a \neq b \neq c$)

$$P(x) = c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

A) 6 B) 9 C) 12
 D) 15 E) 18

2. Sea $f(x)$ un polinomio cuadrático mónico que satisfice $f(x) = f(1-x)$, además carece de término independiente. Determine el valor de

$$K = \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(13)}$$

A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{13}{12}$ C) $\frac{11}{12}$
 D) $\frac{10}{12}$ E) $\frac{10}{11}$

Nivel II

3. Siendo $P(x)$ un polinomio lineal que cumple

$$P(P(P(x))) = 8x + 154$$

Halle $P(P(3))$.

A) 27 B) 33 C) 78
 D) 81 E) 96

4. Dado el polinomio homogéneo

$$P(x, y, z) = ax^{(a+1)b}(b^a) + y^{(a-1)a}(b^{2b}) + 6z^{b^{a+2b}}$$

donde $a; b \in \mathbb{Z}^+$, halle el valor de $\sqrt[a]{b(a+1)}$.

A) 2 B) $\sqrt{12}$ C) $\sqrt[3]{12}$
 D) 1 E) 3

Nivel III

5. Sea $F(x - 14\sqrt{x} + 44) = x$, halle $F(9x - 42\sqrt{x} + 44)$ si $\sqrt{x} > 7$.

A) $9x$ B) $2x$ C) $-9x$
 D) $-2x$ E) No se puede determinar



Helicodesafío

1. Sabiendo que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Calcule el valor de

$$M = \frac{\Gamma(8) \cdot \Gamma(1/2)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

- A) $\frac{7!}{2}$ B) $-\frac{7!}{2}$ C) $\frac{7!}{4}$
D) $-\frac{7!}{4}$ E) 1

2. Dada la expresión matemática

$$H\left(\frac{a-b\sqrt{x^a} + a-b\sqrt{x^b}}{a-b\sqrt{x^a} - a-b\sqrt{x^b}}\right) = x$$

evalúe $H(3) \cdot H(5) \cdot H(7) \cdot \dots \cdot H(99)$.

- A) 50 B) 51 C) 100
D) 101 E) 99

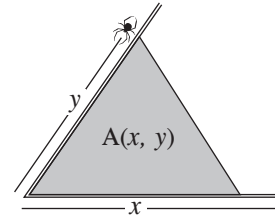
3. Sea $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta. (Considere $f(1)=f(2)=1$)

- $f(5)=5$ ()
➤ $f(n+2) + f(n+1) + f(n)$ ()
➤ $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = f(2021) - 1$ ()

- A) VVV B) FVF C) FFF
D) VVF E) VFV

4. Se tiene una araña que teje su telaraña según la figura.



Siendo a el ángulo en la esquina inferior izquierda. El área de la región cubierta por la telaraña está definida como: $A(x, y) = P(x) \cdot P(y)$. Calcule el valor de $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n)$.

- A) $\sqrt{\frac{\text{sena}}{2}} \frac{n(n+1)}{2}$ B) $\sqrt{\frac{\text{sena}}{2}} \frac{n(n-1)}{2}$
C) $\sqrt{\frac{\text{sena}}{2}} \frac{n(n-1)(n+2)}{2}$ D) n
E) $\frac{n(n+1)}{2}$

5. A cada polinomio de coeficientes reales $P(x)$ se le hace corresponder una familia de polinomios S_n mediante la transformación F , de tal manera que $F(P(x)) = S_n$, donde

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$S_n = \left\{ \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + k \right\}$$

$$(k \in \mathbb{R})$$

Sea $Q(x) \in S_2$, un polinomio cuyos coeficientes son iguales a la unidad. Si se sabe que para este efecto, $F(P(x)) \in S_2$, entonces $P(1)$ es igual a

- A) -4. B) 2. C) 4.
D) 6. E) 8.

PRODUCTOS NOTABLES



Objetivos

- Conoce y aplica los principales productos notables en las solución de problemas de examen de admisión.
- Relaciona los productos notables con otros temas del curso.



Sabías que...

Historia de los productos notables

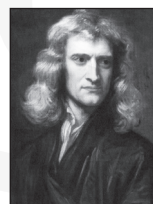
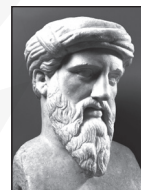
Los productos notables se crearon en Grecia, de Grecia pasaron a Arabia, de Arabia a España y de España a América.



Personajes

Pitágoras de Samos

Nació en el año 571 a. C. en Samos, Grecia y murió en Metaponto, Italia a los 96 años de edad. Pitágoras fue el creador del teorema de Pitágoras para resolver el triángulo rectángulo, luego de utilizar varios productos notables.



Sir Isaac Newton

Nació en 1643 en Londres y murió en 1727 en la misma ciudad a los 84 años. Newton es el creador del binomio de Newton, un producto notable que resuelve la suma o la resta de dos monomios al cuadrado.

Aplicaciones hoy

Los productos notables hoy en día se utilizan mucho en la ingeniería para calcular superficies, áreas de terrenos y en la física.





PRODUCTOS NOTABLES

Son aquellos resultados más frecuentes, más usados, que por necesidad se emplean al momento de resolver un problema y no es necesario efectuar la multiplicación.



Anotación

- El producto es el resultado de multiplicar dos o más números

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= b \cdot a \\
 a(x+y) &= ax+ay \\
 (a+b)(x+y) &= ax+ay+bx+by
 \end{aligned}$$

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. Trinomio cuadrado perfecto (TCP)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{7}-3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2\sqrt{7} \cdot 3 + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7}$$

$$m^2 + 8m + 16 = m^2 + 2(m)(4) + 4^2 = (m+4)^2$$

2. Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos

$$(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3}) = \sqrt{11}^2 - \sqrt{3}^2 = 11 - 3 = 8$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = (x^2)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 - \frac{1}{x^4}$$

$$\begin{aligned}
 a^4 - 1 &= (a^2)^2 - 1^2 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = \\
 &= (a+1)(a-1)(a^2 + 1)
 \end{aligned}$$

IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$



Anotación

Adrian Legendre

Matemático francés realizó numerosos aportes a las matemáticas, entre ellos el polinomio de Legendre.

Ejemplos

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4x\left(\frac{1}{x}\right) = 4$$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 = 2(\sqrt{7}^2 + \sqrt{5}^2) = 2(7+5) = 24$$

$$(m^2+1)^4 - (m^2-1)^4 = 8(m^2)(1)((m^2)^2 + 1^2) = 8m^2(m^4+1) = 8m^6 + 8m^2$$

3. Multiplicación de binomios con un término en común (Identidad de Steven)

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\begin{aligned}
 (x+a)(x+b)(x+c) &= x^3 + (a+b+c)x^2 + \\
 &+ (ab+ac+bc)x + abc
 \end{aligned}$$

Ejemplos

$$(x+11)(x-4) = x^2 + (11-4)x + 11(-4) = x^2 + 7x - 44$$

$$(a^5+6)(a^5-2) = (a^5)^2 + (6-2)a + 6(-2) = a^{10} + 4a - 12$$

$$m^2 + 11m + 28 = m^2 + (7+4)m + 7(4) = (m+7)(m+4)$$

4. Desarrollo del binomio al cubo (Ident. de Cauchy)

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

Ejemplos

$$(x+3)^3 = x^3 + 3^3 + 3(x)(3)(x+3)$$

$$(x+3)^3 = x^3 + 27 + 9x^2 + 27x$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x + \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} \triangleright (\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})^3 &= \sqrt[3]{5^3} + \sqrt[3]{2^3} + 3(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}) \\ &= 5 + 2 + 3\sqrt[3]{10}(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}) \\ &= 7 + 3\sqrt[3]{50} + 3\sqrt[3]{20} \end{aligned}$$

5. Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Ejemplos

$$\triangleright (\sqrt[3]{7}+1)(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1)=\sqrt[3]{7^3}+1^3=8$$

$$\triangleright (a^2-1)(a^4+a^2+1)=(a^2)^3-1^3=a^6-1$$

$$\triangleright m^6+1=(m^2)^3+1^3=(m^2+1)(m^4-m^2+1)$$

IDENTIDADES DE LAGRANGE

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

$$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$$

Ejemplo

$$\triangleright (2x+3y)^2+(3x-2y)^2=(2^2+3^2)(x^2+y^2)=13x^2+13y^2$$

$$\begin{aligned} \triangleright (\sqrt{10}+\sqrt{21})^2+(\sqrt{15}+\sqrt{14})^2 &= (\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{7}\times\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}\times\sqrt{3}-\sqrt{7}\times\sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{5}^2+\sqrt{7}^2)(\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2) \\ &= 12(5)=60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright (2x+3y+5z)^2+(2y-3x)^2+(2z-5x)^2+(3z-5y)^2 &= (2^2+3^2+5^2)(x^2+y^2+z^2) \\ &= (38)(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

IDENTIDAD DE ARGAND

$$(x^{2n}+x^ny^m+y^{2m})(x^{2n}-x^ny^m+y^{2m})=x^{4n}+x^{2n}y^{2m}+y^{4m}$$

Ejemplo

$$\triangleright (x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)=x^8+x^4y^4+y^8$$

$$\triangleright (x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$$

$$\begin{aligned} \triangleright y^{16}+y^8+1 &= (y^8+y^4+1)(y^8-y^4+1) \\ &= (y^4+y^2+1)(y^4-y^2+1)(y^8-y^4+1) \\ &= (y^2+y+1)(y^2-y+1)(y^4-y^2+1)(y^8-y^4+1) \end{aligned}$$

Anotación

Jean Robert Argand

Fue un matemático autodidacta francés, nacido en Suiza, que describió en 1806, mientras trabajaba en una tienda de libros en París, la representación geométrica de los números complejos, publicando la idea de lo que se conoce como plano de Argand.

6. Desarrollo del trinomio cuadrado

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} \triangleright (\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 &= \sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2+\sqrt{7}^2+2(\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\sqrt{3}\times\sqrt{7}+\sqrt{5}\times\sqrt{7}) \\ &= 3+5+7+2(\sqrt{15}+\sqrt{21}+\sqrt{35}) \\ &= 15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright (2x-3y+7z)^2 &= (2x)^2+(-3y)^2+(7z)^2+2((2x)(-3y)+(-3y)(7z)+(2x)(7z)) \\ &= 4x^2+9y^2+49z^2+2(-6xy+14xz-21yz) \\ &= 4x^2+9y^2+49z^2-12xy+28xz-42yz \end{aligned}$$

$$\triangleright a^2+b^2+5+2ab+2\sqrt{5}a+2\sqrt{5}b=(a+b+\sqrt{5})^2$$

IDENTIDAD AUXILIAR

$$(a+b)(a+c)(b+c)\equiv(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$$

Ejemplo

$$\triangleright (x+2)(x+z)(2+z)=(x+2+z)(2x+xz+2z)-2xz$$

$$\begin{aligned} \triangleright (m+n+1)(mn+n+m)-mn &= \\ (m+n)(m+1)(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright (\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) &= \\ (\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{6})-\sqrt{30} \end{aligned}$$

Anotación

Augustin Louis Cauchy

Fue un matemático francés, miembro de la Academia de Ciencias de Francia, fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos solo superado por Euler.

7. Desarrollo del binomio al cubo

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c) \\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc \end{aligned}$$

Ejemplo

- $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} + 1)^3 = \sqrt[3]{3}^3 + \sqrt[3]{2}^3 + 1^3 +$
 $3(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{2} + 1)$
 $= 6 + 3(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{2} + 1)$
- $(x+y-2)^3 = x^3 + y^3 + (-2)^3 + 3(x+y-2)$
 $(xy-2x-2y) - 3(x)(y)(-2)$
 $= x^3 + y^3 - 8 + 3(x+y-2)(xy-2x-2y) + 6xy$
- $m^3 + n^3 + p^3 + 3(m+p)(m+n)(n+p) = (m+n+p)^3$

IDENTIDAD DE GAUSS

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Ejemplos

- $x^3 + y^3 + 8 - 6xy = (x+y+2)(x^2 + y^2 + 4 -$
 $xy - 2x - 2y)$
- $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{6})$
 $= \sqrt[3]{5}^3 + \sqrt[3]{3}^3 + \sqrt[3]{2}^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2})$
 $= 5 + 3 + 2 - 3\sqrt[3]{5 \times 3 \times 2}$
 $= 10 - 3\sqrt[3]{30}$
- $a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3b^3c^3 = (a^3 + b^3 + c^3)$
 $(a^6 + b^6 + c^6 - a^3b^3 - a^3c^3 - b^3c^3)$



Anotación

Johann Carl Friedrich Gauss

Fue un matemático, astrónomo, geobotánico y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

IDENTIDADES CONDICIONALES

$$\text{Si } a+b+c=0$$

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $(ab + ac + bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$
- $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$
- $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$
- $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$

Ejemplos

- $(a-b)^3 + (a-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a+b)(b-c)(c-a)$
- $(x^2 + y^2 + (x+y)^2)^2 = (x^2 + y^2 + (-x-y)^2)^2$
 $= 2(x^4 + y^4 + (-x-y)^4)$
 $= 2(x^4 + y^4 + (x+y)^4)$
- $x = \sqrt{2} - \sqrt{3} ; y = \sqrt{3} - 1 ; z = 1 - \sqrt{2}$
 $\rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$



Anotación

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\rightarrow a+b+c=0 \vee a=b=c$$

TEOREMA 1

$$a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a=0, b=0, c=0$$

Ejemplos

- $(x-4)^2 + (y-7)^2 + (z-6)^2 = 0; \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$
 $\rightarrow x-4=0 ; y-7=0 ; z-6=0$
 $x=4 ; y=7 ; z=6$
- $\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} + \underbrace{z^2 - 8z + 16}_{(z-4)^2} = 0; \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 0$
 $\rightarrow x-2=0 ; y-3=0 ; z-4=0$
 $x=2 ; y=3 ; z=4$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a+2b+3c) - 14 ; \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$
 $a^2 - 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 + c^2 - 6c + 9 = 0$
 $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 0$
 $\rightarrow a-1=0 ; b-2=0 ; c-3=0$
 $a=1 ; b=2 ; c=3$

TEOREMA 2

$$a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

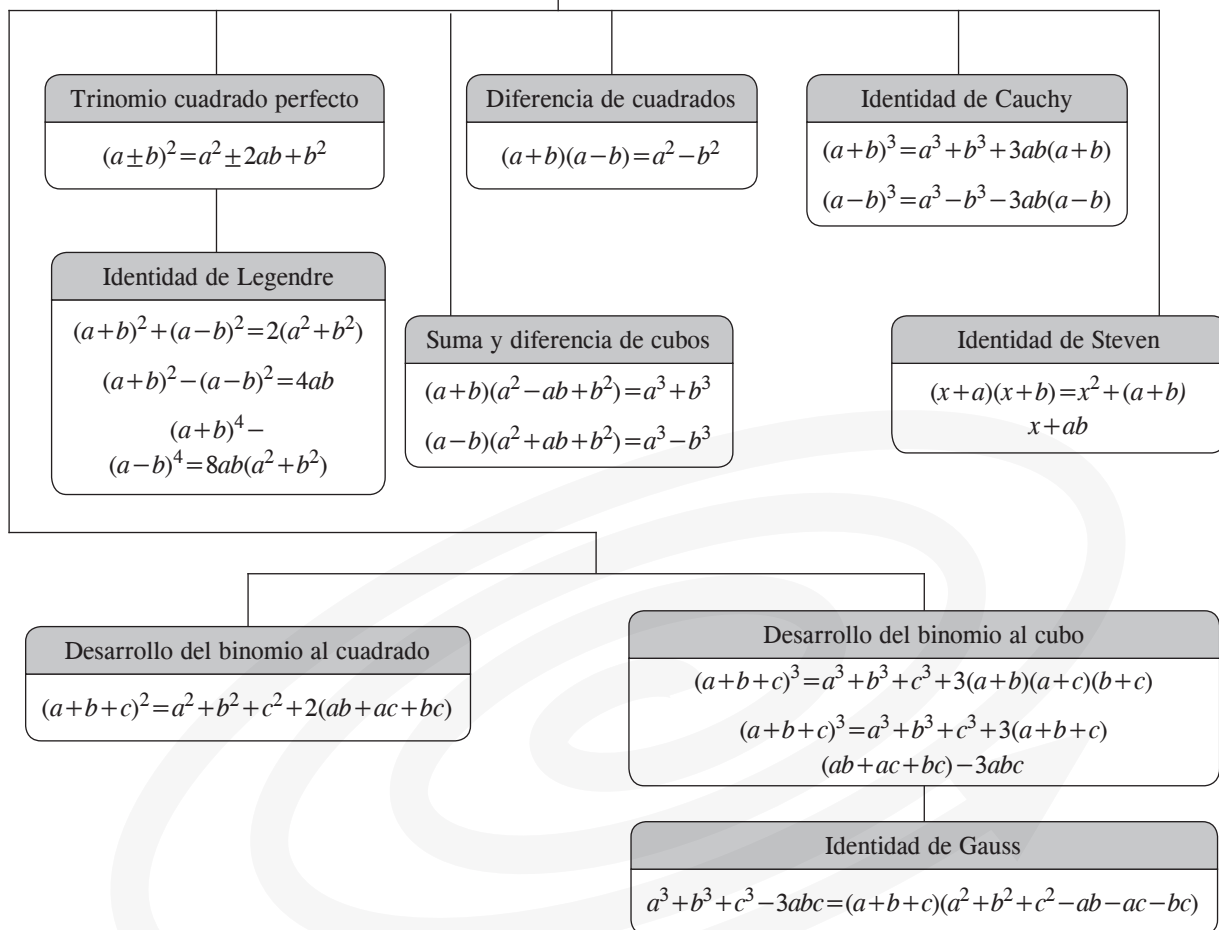
$$\Leftrightarrow a=b=c=k ; k: \text{ constante}$$

Ejemplos

- $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz ; \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}$
 $\rightarrow x=y=z$
- $a^2 + b^2 + 2 = ab + \sqrt{2}(a+b) ; \{a, b\} \subset \mathbb{R}$
 $\rightarrow a^2 + b^2 + \sqrt{2}^2 = ab + a\sqrt{2} + b\sqrt{2}$
 $\rightarrow a=b=\sqrt{2}$
- $a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 ; \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$
 $\rightarrow a^2 = b^2 = c^2$



PRODUCTOS NOTABLES



IDENTIDADES CONDICIONALES:

Si $a + b + c = 0$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$$

$$\rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$\rightarrow (ab + ac + bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$$

$$\rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$$

Teoremas

$$\rightarrow \text{Sean } a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

$$\leftrightarrow a = b = c = 0$$

$$\rightarrow \text{Sean } a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

$$\leftrightarrow a = b = c = k ; k: \text{ constante}$$



Problemas resueltos

1. Dado $xyz = \frac{1}{4}$, calcule

$$E = \frac{(xy+z)^4 + (x^2y^2-z^2)^2 + (xy-z)^4}{(xy+z)^6 - (xy-z)^6}$$

UNI 2018-II

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

Resolución

$$xy+z=a \quad ; \quad xy-z=b$$

$$E = \frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^6 - b^6} = \frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)} = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$E = \frac{1}{(xy+z)^2 - (xy-z)^2} = \frac{1}{4xyz}$$

$$\text{Pero: } xyz = \frac{1}{4} \rightarrow E = 1$$

Rpta.: 1

2. Si $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 7$, calcule

$$E = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

CEPREUNI 2008-II

- A) 5 B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{5}$

Resolución

$$E^2 = \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 \quad \wedge \quad \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^3 = 7^3$$

$$E^2 - 2 = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x + \frac{1}{x} + 3 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = 343$$

$$(E^2 - 2)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 \quad x + \frac{1}{x} = 322$$

$$(E^2 - 2)^2 = 324$$

$$E^2 - 2 = 18$$

$$E^2 = 20$$

$$E = 2\sqrt{5}$$

Rpta.: $2\sqrt{5}$

3. Si se cumple $a(1+b) = a^2 + b(b+1)$ y $c(1+d) = c^2 + d(d+1)$, calcule

$$E = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}$$

CEPREUNI 2008-I

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 9

Resolución

$$a+ab=a^2+b^2+b$$

$$a-ab=a^2-ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)$$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^2-b^2=a^3+b^3$$

$$\rightarrow E = \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{a^3+b^3+c^3+d^3} = 1$$

Rpta.: 1

4. Si se cumple $x^2+2y+2=2x-2xy$; $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, calcule $E = \frac{3xy}{x^2+y^2}$.

CEPREUNI 2009-I

- A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{2}$
D) $\frac{2}{7}$ E) 1

Resolución

$$x^2+2y^2+2=2x-2xy$$

$$2x^2+4y^2+4=4x-4xy$$

$$x^2+4xy+4xy^2+x^2-4x+4=0$$

$$(x+2y)^2 + (x-2)^2 = 0$$

$$x = -2y \quad \wedge \quad x = 2$$

$$2 = -2y$$

$$-1 = y \rightarrow E = \frac{3(2)(-1)}{2^2 + (-1)^2} = -\frac{6}{5}$$

Rpta.: $-\frac{6}{5}$

5. Determine la expresión equivalente al reducir

$$\frac{z^3(x-y)^3 + x^3(y-z)^3 + y^3(z-x)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

CEPREUNI 2007-II

- A) $2xyz$ B) xyz C) $6xyz$
D) $3xyz$ E) $-xyz$

Resolución

$$\frac{z^3(x-y)^3 + x^3(y-z)^3 + y^3(z-x)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

$$\frac{(zx-zy)^3 + (xy-xz)^3 + (yz-yx)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

$$\frac{3(zx-zy)(xy-xz)(yz-yx)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$\frac{z(x-y) \cdot x(y-z) \cdot y(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = zxy$$

Rpta.: xyz 

Anotación

Si $a+b+c=0$ entonces $a^3+b^3+c^3=3abc$



Helicopráctica

Nivel I

1. Efectúe

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - (x^2+5x+5)^2$$

Resolución

3. Reduzca

$$\sqrt[3]{(a+1)^2(a^2+2a-1) - (a-1)^2(a^2-2a-1)}$$

Resolución

2. Sabiendo que $x + \frac{1}{x} = -1$, calcule

$$x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

Resolución

4. Si $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$, calcule el valor de

$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+3$$

Resolución

Nivel II

5. Si $x-2=\sqrt{3}$, calcule

$$E = \left(x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} \right)^x \right) \left(x^x + \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \right)$$

Resolución

7. Calcule el valor numérico de

$$M = \frac{2[a^4 + b^4 + (a+b)^4]}{[a^2 + b^2 + (a+b)^2]^2}$$

Para $a = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$ y

$$b = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{11}$$

Resolución

6. Calcule

$$E = \frac{(x+y+z)(7-xz-xy-yz)}{5-xyz}$$

si se cumple $x^3+y^3+z^3=15$ y $x^2+y^2+z^2=7$.

Resolución

8. Si $a^{12}+b^{12}+c^{12}=8$ además se cumple

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{abc} = \frac{-6}{a+b+c}$$

calcule $a^6+b^6+c^6$.

Resolución

Nivel III

9. Se cumple $x+y+z=1 \wedge xz+xy+yz=xyz$, calcule

$$(x^9+y^9+z^9)\left(\frac{1}{x^{11}+y^{11}+z^{11}+1}\right)$$

Resolución

11. Si a, b, c son números reales distintos entre si que verifican

$$a^3=3(b^2+c^2)-25$$

$$b^3=3(c^2+a^2)-25$$

$$c^3=3(a^2+b^2)-25$$

Calcule $a + b + c$.

Resolución

10. Halle el menor valor natural de n , tal que

$$4^{19}+4^{98}+4^n$$

sea un cuadrado perfecto.

Resolución

12. Dadas las condiciones

$$a = (a - b)^2 + b(a + 1)$$

$$b = (b - c)^2 + c(b + 1)$$

$$c = (c - a)^2 + a(c + 1)$$

Simplifique la expresión

$$M = \frac{(a^6 - b^6)^2}{c^6 - 4a^3b^3}$$

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Si $a+2b+3c=0$ y $abc \neq 0$, calcule

$$P = \frac{a^3 + 8b^3 + 27c^3}{abc}$$

Resolución

3. Si $\frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, calcule

$$S = \left(\frac{a}{b}\right)^8 + \left(\frac{b}{a}\right)^8$$

Resolución

2. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$, halle

$$E = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}$$

Resolución

Nivel II

4. Si $f(x) = a^x + b^x$; $f(3) = 1$, calcule

$$\sqrt[3]{\frac{f(1)}{f(4) - f(7)}}$$

Resolución

5. Si $\sqrt[9]{\frac{x^2}{y^2}} + \sqrt[9]{\frac{x}{z}} + \sqrt[9]{\frac{y^2}{z^2}} = 0$

Calcule

$$E = \left(\frac{xz}{y^2}\right)^9 - \left(\frac{y^2}{xz}\right)^9$$

Resolución

Nivel III

7. Si $x + \sqrt{xz} = y + \sqrt{yz}$; $x \neq y \wedge xyz \neq 0$, calcule

$$\frac{x}{\sqrt{yz}} + \frac{y}{\sqrt{xz}} + \frac{z}{\sqrt{xy}}$$

Resolución

6. Si $2x^{-1} = 2 - x$, calcule

$$P = x^9 - (x^4 + x^2 + 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

Resolución

8. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^+$; $xy + xz + yz = 1$, calcule

$$P = \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} \cdot x + \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} \cdot y + \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}} \cdot z$$

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Si $x^2 - 7x = 1$, calcule $(x-2)(x-3)(x-5)(x-4)$.

A) 143 B) 142 C) 141
D) 140 E) 139

2. Si $a+b=ab=-2$, calcule $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$.

A) $-2/5$ B) $-5/2$ C) $5/2$
D) $2/5$ E) 1

Nivel II

3. Si $x^2 + 4y^2 = 2(3x+2y) - 10$; $x, y \in \mathbb{R}$, calcule $8y - x$.

A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

4. Si $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$; $y = \sqrt{2} + \sqrt{5}$; $z = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$, calcule

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + xz + yz} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^4 + y^4 + z^4}$$

A) 0 B) -1 C) 3
D) 8 E) 5

Nivel III

5. Si $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$, calcule $x^{2020} + \frac{1}{x^{2020}}$.

A) -1 B) 2019 C) -2019
D) 1 E) 0



Test 2

Nivel I

1. Si $x^2 + 5x = -1$, calcule $(x+3)(x+2)(x-7)(x+12)$.

A) -425 B) 425 C) 415
D) -415 E) 225

2. Si $a+b=ab=-1$, calcule $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$.

A) $4/3$ B) $-4/3$ C) $3/4$
D) $-3/4$ E) 1

Nivel II

3. Si $9a^2 + b^2 = 2(3a+4b) - 17$; $a, b \in \mathbb{R}$, calcule $18a - b$.

A) 0 B) -1 C) 2
D) -2 E) 1

4. Si $m = \sqrt{7} + \sqrt{2}$; $n = 1 - \sqrt{2}$; $p = -1 - \sqrt{7}$, calcule

$$\frac{6mnp}{m^3 + n^3 + p^3} + \frac{m^4 + n^4 + p^4}{(m^2 + n^2 + p^2)^2} + \frac{mn + mp + np}{m^2 + n^2 + p^2}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) -1

Nivel III

5. Si $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$, calcule $x^{2022} + \frac{1}{x^{2022}}$.

A) -2 B) 0 C) -1
D) 2 E) 1



Helicodesafío

- Si se cumple $\frac{3x+2y}{3a-2b} = \frac{3y+2z}{3b-2c} = \frac{3z+2x}{3c-2a}$, calcule el equivalente.

$$\frac{(5x+5y+5z)(5c+4b-3a)}{9x+8y+13z}$$

A) $a+b+c$ B) $a-b+c$ C) $a+b-c$
 D) $c+b-a$ E) 1
- Halle el número de valores enteros de m que verifican

$$m^2+2n=n^2+2m+5$$

A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6
- Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=8$
 Calcule

$$(a^{2007}+b^{2007}+c^{2007})(a^{-2007}+b^{-2007}+c^{-2007})$$

A) 1 B) 6 C) 9
 D) $1/3$ E) 3
- Si x, y, z son números reales positivos que satisfacen: $x+y+z = x^2+y^2+z^2=1$, calcule

$$\frac{x^4+y^4+z^4-4xyz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

A) $4/3$ B) 1 C) 0
 D) 2 E) $1/2$
- De la condición $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=2x^2$ calcule el valor de

$$\sqrt[73]{\frac{x^{148}+2^{74}}{x^2}}$$

A) 2 B) 4 C) 8
 D) 16 E) 32

DIVISIÓN DE POLINOMIOS



Objetivos

- Reconoce los elementos y las propiedades de la división.
- Efectúa la división, usando los métodos de Horner y Ruffini.
- Encuentra el resto de una división, sin efectuar la operación (en ciertos casos).
- Reconstruye polinomios, bajo ciertas condiciones, usando la divisibilidad polinómica.
- Conoce la importancia y aplicaciones del teorema del factor.



Sabías que...

William George Horner

William George Horner (Bristol, Inglaterra, 22 de septiembre de 1789 - Bath, Inglaterra, 1837) fue un matemático inglés.

A los 14 años se convirtió en maestro, cuatro años después se convirtió en director de la misma escuela en la que estudió. En 1809 se trasladó a Bath, donde fundó su propio colegio.

Como investigador, solo tiene en su haber una contribución, el llamado algoritmo de Horner para resolver ecuaciones algebraicas, publicado por la Royal Society en 1819. Este método alcanzó cierta popularidad en Inglaterra y Estados Unidos gracias al también matemático De Morgan, que lo utilizó en sus artículos divulgativos, aunque finalmente se popularizó la regla de Paolo Ruffini, descrito y publicado en 1814, por el cual le fue concedida la medalla de oro por la Italian Mathematical Society for Science. Sin embargo, ni Ruffini, ni Horner fueron los primeros en descubrir este método ya que Zhu Shijie lo había empleado 500 años antes.

Fue educado en la Escuela Kingswood Bristol. A la edad casi increíble de 14 años se convirtió en asistente de maestro en la escuela Kingswood en 1800 y cuatro años más tarde director. Salió de Bristol y fundó su propia escuela en 1809; en el seminario de 27 Grosvenor Place en Bath.

Horner es en gran parte recordado por un método, el método de Horner, para la resolución de ecuaciones algebraicas, que le atribuyen Augustus De Morgan y otros. Ha publicado sobre el tema en las Philosophical Transactions de la Royal Society de Londres en 1819, la presentación de su artículo el 1 de julio. Pero Fuller ha señalado que, en contra de De Morgan la afirmación de que este artículo no contiene el método, aunque uno publicado por Horner en 1830 lo hace. Fuller ha encontrado que Teófilo Holdred, un relojero de Londres, llegó a publicar el método en 1820 y algunas observaciones:

A primera vista, parece plagio de Horner como el robo directo. Sin embargo, parece que era de un carácter excéntrico y obsesivo ... Un hombre puede fácilmente convencerse de que primero un método rival no era muy diferente del suyo, y luego, poco a poco, llega a creer que él mismo lo había inventado.

Esta discusión es un tanto discutible porque el método se había previsto en el siglo XIX en Europa por Paolo Ruffini (que le valió la medalla de oro ofrecida por la Sociedad Italiana



para la Ciencia Matemática que buscaban mejores métodos para la resolución numérica de ecuaciones), sino que, en cualquier caso, ha sido considerado por Zhu Shijie en China en el siglo XIII. En el siglo XIX y principios del siglo XX, el método de Horner tenía un lugar prominente en América y textos de inglés en el álgebra. No se entiende el por qué debería ser así. La respuesta se encuentra simplemente con De Morgan que dio el nombre de método de Horner y una amplia cobertura en muchos artículos que escribió.

Horner hizo otras contribuciones matemáticas, sin embargo, la publicación de una serie de documentos sobre la transformación y resolución de ecuaciones algebraicas, y él también se aplican técnicas similares a las ecuaciones funcionales.

Después de que muriera Horner, su hijo llamado también William Horner mantuvo en funcionamiento la escuela de Bath.

Paolo Ruffini (Valentano, 22 de septiembre de 1765 - Módena, 9 de mayo de 1822) fue un matemático, filósofo y médico italiano. Nació el 22 de septiembre de 1765 en Valentano, Italia, y murió el 9 de mayo de 1822 en Módena, actual Italia. Su padre, Basilio Ruffini, era médico en Valentano. De niño parecía destinado a la carrera religiosa. Su familia se mudó a Reggio, en el ducado de Módena, en el norte de la actual Italia y Paolo entró en la universidad de Módena en 1783 para estudiar matemáticas, medicina, filosofía y literatura. Entre sus profesores estaba Luigi Fantini, que le enseñó geometría y Paolo Cassiani que le enseñó cálculo. En aquel entonces, la familia de este gobernaba Módena y en 1787, Cassiani fue elegido concejal, teniendo que dejar la universidad. Así fue como el curso de Cassiani sobre los fundamentos del análisis fue impartido por Ruffini durante el curso 1787-88 cuando todavía era estudiante. Finalmente, el 9 junio de 1788 Ruffini se graduó en filosofía, medicina y cirugía. Poco después consiguió su grado en matemáticas. El 15 de octubre de 1788, fue nombrado profesor de Fundamentos de Análisis. Después, Fantini, que le había enseñado geometría perdió poco a poco la vista y tuvo que renunciar a su puesto. Ruffini fue elegido catedrático de Elementos de Matemáticas en 1791. Sin embargo, Ruffini no era solo matemático. También, en 1791, obtuvo la licencia para ejercer la medicina en Módena. Después de la Revolución francesa, era tiempo de guerra. A principios de 1795 Francia obtenía victorias en todos los frentes. En el norte de Italia las tropas francesas amenazaban las posiciones austro-sardas. En marzo de 1796 Napoleón Bonaparte tomó el mando de la campaña. Derrotó a esas tropas y marchó sobre Turín. El rey de Cerdeña pidió un armisticio y como resultado Niza y la Saboya fueron anexionadas a Francia. Bonaparte continuó la guerra contra los austríacos y ocupó Milán pero fue retenido en Mantua. Firmó armisticios con los duques de Parma y de Módena. Después ocupó Módena y, contra sus deseos, Ruffini se encontró en medio de todo este trastorno político.

Paolo Ruffini es conocido como el descubridor del llamado método de Ruffini que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio $x-a$. Sin embargo, no fue esta su mayor contribución al desarrollo de la matemática. Hacia 1805 elaboró una demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas de grados quinto y superiores, aunque cometió ciertas inexactitudes que serían corregidas por el matemático noruego Niels Henrik Abel.



DIVISIÓN DE POLINOMIOS

INTRODUCCIÓN

La división de polinomios se origina con la división entera de números naturales, y hay una relación directa entre las propiedades de ambas divisiones. Así, las operaciones algebraicas de polinomios son análogas a las operaciones de los números naturales, de este modo, la adición y multiplicación de números naturales generan números naturales, en cambio la sustracción y la división de los números naturales no siempre genera números naturales. Luego, para dividir enteros se creó el algoritmo de Euclides, y como consecuencia de la operación de división nace la teoría de la divisibilidad entre enteros, pero no solamente estos resultados se pueden aplicar para dividir números enteros, sino también se pueden aplicar para dividir polinomios y en forma análoga aplicar la divisibilidad entre polinomios.

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

La operación de división tiene por objeto calcular dos polinomios denominados *cociente* y *residuo*, partiendo de dos polinomios conocidos como *dividendo* y *divisor*.

Definición: Dados dos polinomios $D(x)$ y $d(x)$, denominados dividendo y divisor, donde $GA(D) \geq GA(d)$ y $d(x) \neq 0$, existen dos únicos polinomios $q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

donde: $GA(R) < GA(d)$

La relación (1) se denomina *algoritmo de la división*, donde q recibe el nombre de *cociente* y R el de *residuo*.

Ejemplo: A partir de: $x^2 = \underbrace{(x+1)}_D \underbrace{(x-1)}_d + \underbrace{1}_q \underbrace{1}_R$

podemos afirmar que al efectuar la división $\frac{x^2}{x+1}$ se obtiene como cociente $q(x) = x-1$ y como residuo $R(x) = 1$, donde además se puede observar que

$$GA(R) < GA(d), \text{ pues } GA(R) = 0 \text{ y } GA(d) = 1$$

CLASES DE DIVISIÓN: DIVISIÓN EXACTA Y DIVISIÓN INEXACTA

De acuerdo a su resto, se pueden clasificar en:

División exacta: Es aquella que no deja residuo o que $R(x) = 0$. Con esto, el algoritmo de la división queda así: $D(x) = d(x) \cdot q(x)$.

Ejemplo: Al dividir $x^2 - x - 12$ entre $x + 3$, se obtiene

$$\underbrace{x^2 - x - 12}_{D(x)} = \underbrace{(x+3)}_{d(x)} \underbrace{(x-4)}_{q(x)}$$

donde: $R(x) = 0$

División inexacta: Es aquella que sí deja residuo o que $R(x) \neq 0$.

Ejemplo: Al dividir $x^3 - 2x + 6$ entre $x^2 + 2x - 1$, se obtiene

$$\underbrace{x^3 - 2x + 6}_{D(x)} = \underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{d(x)} \underbrace{(x - 2)}_{q(x)} + \underbrace{(7x + 4)}_{R(x)}$$

donde: $R(x) \neq 0$

A partir del algoritmo, dividiendo ambos miembros entre $d(x)$, se obtiene:	$\frac{D(x)}{d(x)} \equiv q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$
La expresión del segundo miembro se denomina cociente completo y se denota por $Q(x)$, es decir:	$Q(x) \equiv q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$

PROPIEDADES DE GRADOS

En cualquier caso, la división de polinomios se efectúa con respecto a una sola variable. Según esto, con respecto a esa variable, se cumple que

- $GA(D) \geq GA(d)$
- $GA(q) = GA(D) - GA(d)$
- $GA(R) < GA(d)$
- $GA(R)_{\text{máx}} = GA(d) - 1$

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

1. División de monomios

Ejemplo: Aplicando las leyes de los exponentes se tiene

$$\frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \frac{a_0}{b_0} x^{m-n}, \text{ para } b_0 \neq 0$$

$$\frac{8x^{17}}{24x^{12}} = \frac{8}{24} x^{17-12} = \frac{1}{3} x^5$$

2. División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suman algebraicamente cada uno de estos términos.

Ejemplos

1. Halle el cociente y el resto de la división

$$\frac{3x^2 - 10x^3 + x^2 + 5x - 1}{x - 2}$$

Completando con "0" el término que falta en el dividendo, el esquema queda como en el primer cuadro. Las operaciones se realizan como se muestra en el segundo cuadro.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x-2=0 & 3 & 0 & -10 & 1 & 5 & -1 \\ x=2 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x-2=0 & 3 & 0 & -10 & 1 & 5 & -1 \\ x=2 & \downarrow & 6 & 12 & 4 & 10 & 30 \\ & 3 & 6 & 2 & 5 & 15 & 29 \end{array}$$

Como el coeficiente principal del divisor es igual a "1", el cociente es verdadero, luego $q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 15$ y el resto es $R(x) = 29$.

2. Efectúe la división

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 1}{2x + 3}$$

Realizando el esquema de la división por Ruffini, se tiene que

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2x+3=0 & 4 & 4 & 1 & 4 & -1 \\ x=-3/2 & \downarrow & -6 & 3 & -6 & 3 \\ \div 2 & 4 & -2 & 4 & -2 & 2 \\ & 2 & -1 & 2 & -1 & \end{array}$$

donde: $q(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \wedge R(x) = 2$

Como el coeficiente principal del divisor es distinto de "1", entonces el cociente es falso. Luego, para hallar el cociente verdadero se divide el cociente resultante entre 2 como se indica en el cuadro.

3. Determine el cociente el resto de dividir

$$\frac{x^5 - 7x^2 + 3x + 6}{x + 2}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} x+2=0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 6 \\ x=-2 & \downarrow & -2 & 4 & -8 & 30 & -66 \\ & 1 & -2 & 4 & -15 & 33 & -60 \end{array}$$

Donde: $q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 15x + 33$
 $R(x) = -60$

TEOREMA DEL RESTO O DE DESCARTES

Este teorema se usa para calcular solo el resto de una división, pero sin necesidad de efectuar dicha operación.

Teorema: El resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre un divisor binómico de la forma $(ax+b)$, es igual al valor

numérico de $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Demostración: Supongamos que queremos hallar el resto R de dividir $P(x)$ entre $ax+b$, entonces por el algoritmo de la división se tiene que

$$P(x) = d(x)q(x) + R$$

$$P(x) = (ax+b)q(x) + R, \text{ pero: } ax+b=0 \rightarrow x = -\frac{b}{a},$$

luego reemplazando en el polinomio se tiene

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{\left[a\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right]}_0 q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \rightarrow R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

PROCEDIMIENTO PARA APLICAR EL TEOREMA DEL RESTO

- Se iguala el divisor a 0. Si el divisor es de primer grado, se despeja x . Si el divisor es de grado mayor que 1, se despeja una expresión adecuada (por lo general, la mayor potencia de x).
- Se acomoda el dividendo, formando en él la expresión despejada anteriormente. Si el divisor es de primer grado, no es necesario realizar esto.
- Se reemplaza el valor de x (si el divisor es de primer grado) o el valor de aquella expresión (si el divisor es de grado mayor que 1), en aquel dividendo. Luego de efectuar las operaciones correspondientes, el resultado que se obtiene es el resto.

Ejemplos

1. Halle el resto en la división $\frac{3x^{11} + 4x^6 - 5x^3 - 1}{x + 1}$.

Resolución

Por el teorema del resto

➤ Igualando el divisor a 0 y despejando x
 $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

➤ Reemplazando en el dividendo
 $P(-1) = 3(-1)^{11} + 4(-1)^6 - 5(-1)^3 - 1$

➤ Efectuando las operaciones correspondientes, el resto de la división será
 $R = P(-1) = -3 + 4 + 5 - 1 \rightarrow R = 5$

2. Suponiendo que el polinomio P es de grado mayor que 0, halle el resto en cada caso.

➤ $\frac{P(x)}{x+4} \rightarrow R = P(-4)$

➤ $\frac{P(x)}{2x-3} \rightarrow R = P(3/2)$

3. Halle el resto de dividir $\frac{x^7+x^5+x^3+2x-3}{x^3-3}$.

Resolución

Usando el teorema del resto

- Igualando el divisor a "0" y despejando la mayor potencia de x se tiene

$$x^3-3=0 \rightarrow x^3=3$$

- Acomodando el dividendo, formando en este x^3
 $D=(x^3)^2 \cdot x + (x^3) \cdot x^2 + (x^3) + 2x - 3$

- Reemplazando el valor de x y efectuando las operaciones respectivas, se obtiene el resto

$$R(x)=(3)^2 \cdot x + (3) \cdot x^2 + (3) + 2x - 3 \rightarrow$$

$$R(x)=3x^2+11x$$

Nótese que este resto es de menor grado que el divisor.

4. Halle el resto de la división $\frac{(x+2)^{2n}+x^2+5}{(x+1)(x+3)}$.

Resolución

Aplicando el teorema del resto

- Igualando el divisor a 0 y despejando la mayor potencia de x se tiene

$$(x+1)(x+3)=0 \rightarrow x^2+4x+3=0 \rightarrow x^2=-4x-3$$

- Acomodando el dividendo: $D=[(x+2)^{2n}]+x^2+5$
 $\rightarrow D=[x^2+4x+4]^n+(x^2)+5$

- Reemplazando y efectuando las operaciones correspondientes, se obtiene el resto

$$R=[-4x-3+4x+4]^n+(-4x-3)+5 \rightarrow$$

$$R=[1]^n-4x-3+5$$

$$\therefore R=-4x+3$$

DIVISIBILIDAD POLINÓMICA

Definición: Un polinomio $P(x)$ se dice que es divisible entre otro $d(x)$ si y sólo si la división $\frac{D(x)}{d(x)}$ es exacta ($R(x) \equiv 0$). Esto significa que existe un único polinomio $q(x)$ tal que: $P(x) \equiv k \cdot d(x) \cdot q(x)$

También se dice que: " $d(x)$ es un divisor o factor del polinomio $P(x)$ ".

Ejemplos

- A partir de $x^3-1 \equiv (x-1)(x^2+x+1)$ decimos que x^3-1 es divisible entre $x-1$ o $x-1$ es un divisor o factor de x^3-1 .
- De la identidad $x^4-1 \equiv (x^2+1)(x^2-1)$ podemos afirmar que x^4-1 es divisible entre x^2+1 o también x^2+1 es un divisor o factor de x^4-1 .

3. La identidad anterior también se puede escribir así $x^4-1 \equiv (x+1)(x^2+1)(x-1)$ de donde se puede decir que x^4-1 es divisible entre $x+1$ o sino $x+1$ es un divisor o factor de x^4-1 .

PROPIEDADES DE LA DIVISIBILIDAD POLINÓMICA

- 1.º Si un polinomio $P(x)$ es divisible separadamente entre $(x-a)$ y $(x-b)$, donde $a \neq b$, entonces $P(x)$ será divisible entre el producto $(x-a)(x-b)$.

$$P(x) \equiv (x-a) \cdot q_1(x) \text{ y } P(x) \equiv (x-b) \cdot q_2(x) \rightarrow$$

$$P(x) \equiv [(x-a)(x-b)] \cdot q(x)$$

- 2.º Si un polinomio $P(x)$ es divisible entre el producto $(x-a)(x-b)$, entonces $P(x)$ será divisible separadamente entre $(x-a)$ y $(x-b)$.

$$P(x) \equiv [(x-a)(x-b)] \cdot q(x) \rightarrow P(x) \equiv (x-a) \cdot q(x) \text{ y }$$

$$P(x) \equiv (x-b) \cdot q_2(x)$$

- 3.º Si al dividir un polinomio $P(x)$ separadamente entre $(x-a)$ y $(x-b)$, donde $a \neq b$, y en ambos casos se obtiene el mismo resto R , entonces al dividir $P(x)$ entre $(x-a)(x-b)$, el resto seguirá siendo R .

$$P(x) \equiv (x-a) \cdot q_1(x) + R \text{ y } P(x) \equiv (x-b) \cdot q_2(x) + R$$

$$\rightarrow P(x) \equiv [(x-a)(x-b)] \cdot q(x) + R$$

- 4.º Si dos polinomios $F(x)$ y $G(x)$ son divisibles entre un mismo divisor $d(x)$, entonces la suma o diferencia de dichos polinomios seguirá siendo divisible entre el mismo divisor.

$$F(x) \equiv d(x) \cdot q_1(x) \text{ y } G(x) \equiv d(x) \cdot q_2(x) \rightarrow$$

$$F(x) \pm G(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$$

TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio $P(x)$ se anula para $x=a$, esto quiere decir que $P(a)=0$, si y solo si $(x-a)$ es un factor de dicho polinomio. Es decir

$$\text{Dado un polinomio } P(x): P(a)=0 \leftrightarrow P(x) \equiv (x-a) \cdot q(x)$$

Ejemplo

El polinomio $P(x)=x^4-5x+4$ se anula para $x=1$: $P(1)=1-5+4=0$, entonces $(x-1)$ es un factor de $P(x)$, es decir $P(x) \equiv (x-1) \cdot q_1(x)$

De la misma forma que en el caso anterior se tiene que

$$\rightarrow P(4)=0 \rightarrow P(x) \equiv (x-4) \cdot q_2(x)$$

$$\rightarrow P(-2)=0 \rightarrow P(x) \equiv (x+2) \cdot q_3(x)$$

Nótese que los cocientes en cada caso son diferentes.



DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Algoritmo de la división

$$D(x) \equiv d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

Clases de división

- Exacta $R(x) \equiv 0$ ($D(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$)
El dividendo $D(x)$ es divisible entre el divisor $d(x)$
- Inexacta $R(x) \neq 0$

Propiedades de la división

1. $d(x) \neq 0 \wedge GA(D) \geq GA(d)$
2. $GA(q) = GA(D) - GA(d)$
3. $GA(r) < GA(d) - 1 \wedge GA(r) \text{ máx} = GA(d) - 1$
4. $TI(D) = TI(d) \cdot TI(q) + TI(r)$
 $\Sigma \text{coef}(D) = \Sigma \text{coef}(d) \cdot \Sigma \text{coef}(q) + \Sigma \text{coef}(r)$

Métodos para dividir polinomios

1. Método de Horner
2. Regla de Ruffin (solo para divisores de primer grado)

Teorema del resto

$$\text{El resto de dividir } \frac{P(x)}{ax+b} \text{ es } R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Divisibilidad polinómica

$$P(x) \text{ es divisible entre } d(x) \leftrightarrow \exists q(x) P(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$$

Propiedades de la divisibilidad:

1. Si $P(x)$ es divisible entre $(x-a) \wedge P(x)$ es divisible entre $(x-b)$, $a \neq b$, entonces $P(x)$ es divisible entre $(x-a)(x-b)$.
2. Si $P(x)$ es divisible entre $(x-a)(x-b)$, $a \neq b$ entonces $P(x)$ es divisible entre $(x-a) \wedge P(x)$ es divisiblemente entre $(x-b)$.
3. Si $P(x) \equiv (x-a) \cdot q_1(x) + R$ y $P(x) \equiv (x-b) \cdot q_2(x) + R$, $a \neq b$ entonces:
 $P(x) \equiv (x-a)(x-b) \cdot q(x) + R$.
4. Si $F(x) \equiv d(x) \cdot q_1(x)$ y $G(x) \equiv d(x) \cdot q_2(x)$, entonces:
 $F(x) \pm G(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$.
5. Si $P(a) = 0 \leftrightarrow P(x) \equiv (x-a) \cdot q(x)$ (Teorema del Factor).



Problemas resueltos

1. Sean $P(x)=9-x^2$ y $Q(x)=ax^3-2x+3$. Determine el valor de a para que $P(x) \cdot (Q(x)-1)$ sea divisible por $x-3$ y satisfaga que la suma de los coeficientes de los términos del cociente sea -12 . UNI 2018-2

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Usando la identidad fundamental de la división se tiene

$$P(x) \cdot (Q(x)-1) \equiv (x-3)q(x)+0$$

donde

- $q(x)$ es el cociente.
- El residuo es nulo por ser divisible.

$q(1)=-12$, donde $q(1)$ es la suma de coeficientes del cociente.

Reemplazando

$$\begin{aligned}(9-x^2)(ax^3-2x+2) &\equiv (x-3) \cdot q(x) \\ -(x+3)(ax^2-2x+2) &\equiv q(x) \\ x=1; -(4)(a-2+2) &= q(1) \\ -4a &= -12 \\ a &= 3\end{aligned}$$

Rpta.: 3

2. Al efectuar la división

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}$$

el término independiente del cociente que resulta es
UNI 2017-1

- A) $-2n$. B) $-n$. C) 0.
D) n . E) $2n$.

Resolución

Aplicando la regla de Ruffini

		(n+2) términos						
		1	0	0	...	0	-(n+1)	n
		↓						
		1	1	...	1		1	-n
$x=1$		1	1	1	...	1	-n	0

$$\rightarrow q(x)=x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x-n$$

Por lo tanto, el término independiente de $q(x)$ es $-n$.

Rpta.: $-n$

3. Al dividir un polinomio $P=P(x)$ de grado 3 entre $(x+2)$ se obtiene un polinomio cociente $Q=Q(x)$ y un resto de grado 1. Si se sabe que $P(0)=-1$, $P(-2)=-5$ y $Q(0)=1$, halle la expresión del resto. UNI 2016-II

- A) $x+3$ B) $x+1$ C) $x-1$
D) $x-3$ E) $2x-1$

Resolución

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x+2 \\ \hline mx+n & Q(x) \\ \hline \end{array}$$

Residuo de grado 1

además, $P(0)=-1$; $P(-2)=-5$ y $Q(0)=1$

Por identidad fundamental tenemos

$$P(x)=(x+2)Q(x)+mx+n$$

$$x=-2: P(-2)=-2m+n=-5$$

$$\begin{aligned}x=0: P(0) &= 2 \cdot Q(0) + m \cdot 0 + n = -1 \\ 2+n &= -1 \rightarrow n = -3\end{aligned}$$

$$\text{Como } -2m+n=-5 \rightarrow m=1$$

Por lo tanto, el resto de la división es $x-3$.

Rpta.: $x-3$

4. Halle el mejor grado del polinomio x^n+ax+b , $a \neq 0$, ($n > 1$) para que x^2-1 sea un divisor.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Como (x^2-1) es un divisor de (x^n+ax+b) , entonces $\frac{x^n+ax+b}{x^2-1}$ es una división exacta.

Por el teorema del resto

$$x^2-1=0$$

$$\rightarrow x^2=1$$

- Si $n=2$

$$R(x)=x^2+ax+b$$

$$R(x)=1+ax+b$$

Para que $R(x) \equiv 0$, se cumple que $a=0$ y $b=-1$, lo cual contradice la condición $a \neq 0 \rightarrow n \neq 2$

- Si $n=3$

$$R(x)=x^3+ax+b$$

$$R(x)=x^2 \cdot x + ax + b$$

$$R(x)=1 \cdot x + ax + b$$

$$R(x)=(a+1)x+b$$

Para que $R(x)=0$, se cumple que $a=-1$ y $b=0$, lo cual no contradice ninguna condición.

Por lo tanto, el menor grado del polinomio es $n=3$.

Rpta.: 3

5. El valor numérico de

$$P(x)=x^5+(3-3\sqrt{3})x^4-9\sqrt{3}x^3+5x+7\sqrt{3}$$

para $x=3\sqrt{3}$ es

- A) $20\sqrt{3}$. B) $22\sqrt{3}$. C) $24\sqrt{3}$.
D) $26\sqrt{3}$. E) $28\sqrt{3}$.

Resolución

Recuerde que en la aplicación del teorema del resto el valor numérico de un polinomio está asociado al residuo de una división algebraica.

$$\frac{P(x)}{x-a} \xrightarrow{\text{resto}} R=P(a)$$

Calculamos convenientemente el valor numérico de

$$P(x)=x^5+(3-3\sqrt{3})x^4-9\sqrt{3}x^3+5x+7\sqrt{3}$$

en $x=3\sqrt{3}$.

Así

$$\frac{P(x)}{x-3\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{resto}} R=P(3\sqrt{3})$$

Luego, aplicamos la regla de Ruffini

	1	$3-3\sqrt{3}$	$-9\sqrt{3}$	0	5	$7\sqrt{3}$
$x=3\sqrt{3}$	↓	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	0	0	$15\sqrt{3}$
	1	3	0	0	5	<u>$22\sqrt{3}$</u>

Como el residuo es $R=22\sqrt{3}$,
entonces $P(3\sqrt{3})=22\sqrt{3}$.

Rpta.: $22\sqrt{3}$



Helicopráctica

Nivel I

1. Halle el cociente al dividir $P(x)=3x^4+x^3+x^2+x-2$ entre $(x+1)(x-2/3)$.

Resolución

2. Halle la suma de coeficientes del residuo de la siguiente división

$$\frac{4x^8-3x^6+5x^2+x-9}{2x^4-x^3+2x-3}$$

Resolución

3. Para que la división de $x^{19}-nx+k$ entre x^2-2x+1 sea exacta, ¿cuál es el valor de $T = \frac{n+19}{k+1}$?

Resolución

Nivel II

5. Si al dividir $5x^3+6x^4-1$ entre $x+3x^2-2$ se obtiene un resto de la forma $mx+n$, determine el valor de $m-n$.

Resolución

4. Se tiene un polinomio $P(x)$ de tercer grado tal que si se divide $P(x)$ entre x^2-x+1 el residuo es $5x-4$, si se divide $P(x)$ entre x^2+4x el residuo es $x+1$. Determine el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-1)(x+1)$.

Resolución

6. Un polinomio de grado $(n+1)$ cuyo primer coeficiente es la unidad, es divisible entre (x^n+2) . Si el resto de dividirlo separadamente entre $(x-1)$ y $(x+2)$ son, respectivamente, 12 y 258, determine el valor de n .

Resolución

Nivel III

7. Determine el resto al dividir

$$\frac{2x^{119}+1}{x^2-x+1}$$

Resolución

9. Dado el polinomio $P(x)$ mónico de grado n que cumple

$$P(1) = 1; P(2) = 2; P(3) = 3; \dots; P(n) = n$$

Determine el resto de dividir $\frac{P(x)}{x}$.

Resolución

8. Un polinomio de tercer grado, cuyo primer coeficiente es la unidad, es divisible por $(x-2)$ y por $(x+1)$, al dividirlo por $(x-3)$ da de resto 20. ¿Qué resto daría dicho polinomio al dividirlo entre $(x+3)$?

Resolución

10. Un polinomio $P(x)$ de cuarto grado cuyo coeficiente del término de mayor grado es 3, es divisible por (x^2-9) y por $(x-1)$. Si al dividir $P(x)$ entre $(x-2)$ se obtiene como residuo -50 , determine el residuo de la división de $P(x)$ entre $(x+1)$.

Resolución

11. Si los cocientes de dividir $P(x)$ entre $(x-1)$ y $(x-2)$ son, respectivamente, $Q(x)$ y $q(x)$, determine $P(3)$ sabiendo que $P(1)=3$; $P(2)=2$ y $2Q(3)+q(3)=5$.

Resolución

12. Un polinomio P es tal que es divisible por $(x^{n-1}+1)$ tiene por término independiente -3 y por grado n . Determine el valor de n si se sabe que al dividirlo separadamente entre $(x-1)$ y $(x-3)$ los restos obtenidos son -2 y 732 , respectivamente.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Determine el valor de $A+B+C$ si la división

$$\frac{8x^5 + 4x^3 + Ax^2 + Bx + C}{2x^3 - x^2 + 3}$$

deja como resto $3x^2 + 2x + 1$.

Resolución

2. Si la división $\frac{(x^3 - 2x + 1)^2(x^2 - x + 2)}{x^3 + x + 1}$ tiene como resto $R(x) = ax^2 + bx + c$, calcule $a+b+c$.

Resolución

3. Si P es un polinomio (de variable x) de tercer grado tal que al dividir P entre $(x^2 - 2x + 2)$ deja un residuo $(3x - 6)$ y al dividir P entre $(x^2 + x)$ su residuo es $(6x + 2)$, halle el residuo que se obtiene al dividir P entre $(x + 1)(x - 2)$.

Resolución

5. Calcule $a + b$ si el polinomio

$$ax^5 + bx^4 - 26x^3 + 30x^2 - 13x + 2$$

es divisible por $2x^2 - 3x + 1$.

Resolución

Nivel II

4. Si al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x^3 + 1)$, el resto resultante es $(x^2 + x - 1)$, halle el resto de dividir $P(x)$ entre $(x^2 - x + 1)$.

Resolución

6. Sea $Q(x)$ el cociente de efectuar la división

$$(x^n + nx^{n-1} - n - 1) \div (x - 1)$$

Determine $Q(1)$.

Resolución

Nivel III

7. Determine el valor de $M=a+b-c$ si la siguiente división: $(ax^5+bx^4+cx^3+28x^2+21x+8) \div (4x^3+3x+1)$, deja como residuo x^2+2x+3 .

Resolución

8. Un polinomio $P(x)$ de sexto grado al ser dividido por $(x+1)^5$, arroja un cociente entero $g(x)$ y un residuo $3x+2$. Si $g(x)$ tiene como coeficiente principal al número 7, y la suma de los coeficientes de $P(x)$ es 325, determine el término independiente de $g(x)$.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Si la división

$$\frac{4x^5+2x^3-mx^2+3x+n}{x^2-2x+1}$$

es exacta, calcule $m+n$.

- A) 16 B) 18 C) 20
D) -20 E) -16

2. El cociente que se obtiene al dividir $(a-3)^4 + (a-2)^2 - 1$ entre $(a-3)(a-2)$ es

- A) $a^2+5a+12$. B) $a^2-3a+15$.
C) a^2+4a+8 . D) $a^2-7a+14$.
E) a^2-6a-2 .

Nivel II

3. Calcule $m \cdot n$ si se sabe que al dividir el polinomio $mx^4+4ax^3-5a^2x^2-3a^3x+na^4$ por $(x+a)$ la división resulta exacta, y al dividir por $(x-a)$ el resto sea igual a $2na^4$, $a \neq 0$.

- A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

4. Si el polinomio $x^4+3x^3+mx^2+6x-n$ es divisible por x^2+3x-5 , calcule $(n+3m)^m$.

- A) -3 B) -1 C) 0
D) 1 E) 10

Nivel III

5. En la división indicada

$$\frac{x^{a+2}+3x^{a+1}+6x^a+9x^{a-1}+\dots+3ax^2+(3a+6)x+3a}{x^2+x+1}$$

la suma de los coeficientes del cociente es 210. Determine el residuo.

- A) $20x+29$ B) $21x+29$
C) $22x+33$ D) $23x+35$
E) $24x+37$



Test 2

Nivel I

1. Si se divide, respectivamente, los polinomios $P(x)$ y $S(x)$ entre (x^2+2) y (x^2-1) , los residuos hallados son $-19x-1$ y $10x+2$, siendo

$$P(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$S(x) = (e+8)x^3 + dx^2 + cx + (b-9)$$

halle el residuo de dividir

$$[P(x) + S(x)] \div [x^2 - 3x + 1]$$

- A) $-160x-1$ B) $160x-57$ C) $57x-160$
 D) $-160x+1$ E) $-157x+160$
2. Un polinomio $P(x)$ de cuatro grado es divisible separadamente por (x^2+1) y (x^2+2x+2) . Si se divide $P(x)$ por (x^3-1) se obtiene por residuo $6x^2+6x+8$. Luego, el término independiente de $P(x)$ es
- A) 2. B) 4. C) 6.
 D) 8. E) 10.

Nivel II

3. En relación a la división $(x^{m+1} + x^m - 2) \div (x-1)^2$, ¿cuáles de los siguientes enunciados son correctos?
- I. Los coeficientes del cociente son enteros impares.
 II. Es una división exacta.
 III. La suma de los coeficientes del cociente es m^2 .
- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y III E) Todos
4. Determine el residuo de dividir $x^{30} + x + 1$ por $(x^2-1)x$. Dé como respuesta la suma de los coeficientes.
- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

Nivel III

5. Si el residuo de la división $(x^{299} + 1) \div (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ se divide entre $(-x^2 - x - 1)$, se obtiene como cociente $Q(x)$. Evalúe $Q(3\sqrt{2})$.
- A) 54 B) 18 C) 72
 D) 325 E) 650



Helicodesafío

1. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, determine el resto de la siguiente división:
- $$\frac{(x-1)^{3n+2} + x}{(x-1)^2 + x}$$
- A) 0 B) x C) $x+1$
 D) $-x+1$ E) $-x$
2. El polinomio $P(x)$ dividido por separado entre (x^2-x+1) y (x^2+x+1) originan residuos $-x+1$ y $3x+5$, respectivamente. Determine el término independiente del residuo de dividir $P(x)$ entre x^4+x^2+1 , $x \in \mathbb{R}$.
- A) 1 B) 3 C) 5
 D) 6 E) 8
3. Determine el residuo de dividir $(x^{320} + x^5 - 2)$ entre $(x^4 - x^2 + 1)$.
- A) $x^3 + x + 1$ B) $x^3 + 2x^2 + x + 2$
 C) $x^2 - 2x + 1$ D) $x^3 - 4x^2 - x - 1$
 E) $x^3 - x^2 - x - 2$
4. Al dividir separadamente el polinomio $P(x)$ entre $x^2 - (b+1)x + b$ y entre $x^2 - (b+2)x + 2b$ se obtiene por restos $(7x-4)$ y $(5x-8)$, respectivamente. Entonces la suma de coeficientes del resto de dividir $P(x)$ entre $x^3 - (b+3)x^2 + (3b+2)x - 2b$ es
- A) -1 . B) 0 . C) 1 .
 D) 2 . E) 3 .
5. Se sabe que $P(x, y, z) = x^n + py^n + qz^n$ es divisible por $x^2 - (ay+bz)x + abyz$, entonces $\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n}$ es igual a
- A) -2 . B) -1 . C) 1 .
 D) 2 . E) 3 .



Objetivos

- Reconoce un factor primo de un polinomio factorizado.
- Identifica el criterio a utilizar de acuerdo al tipo de polinomio que se presente.
- Maneja las diferentes herramientas que se utilizan para factorizar polinomios.



Sabías que...

Criterio de Eisenstein

En matemáticas, el criterio de Eisenstein proporciona una condición suficiente para que un polinomio sea irreducible sobre el conjunto de los números racionales. Y su nombre se debe al matemático alemán Ferdinand Eisenstein. Si tenemos el siguiente polinomio con coeficientes enteros:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

y un número primo p , tal que

- p divide a todo a_i para $i \neq n$.
- p no divide a a_n .
- p^2 no divide a a_0 .

entonces $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$.

Ejemplo

Considérese $g(x) = 3x^2 + 15x + 10$.

Probaremos los siguientes números primos(p):

- $p=2$, no divide a 15, entonces probaremos.
- $p=3$, 3 no divide a 10, entonces probaremos.
- $p=5$, 5 divide a 15, el coeficiente de x , y a 10, el término constante. Además, 5 no divide a 3, el primer coeficiente; y $25 = 5^2$ no divide a 10. Concluiremos, por lo tanto, que $g(x)$ es irreducible.

En algunos casos, la elección del primo puede ser poco clara, pero puede llegar a revelarse por un cambio de variable $y=x+a$. Por ejemplo, consideremos $h(x)=x^2+x+2$. Es aparentemente difícil, ya que ningún primo divide a 1, el coeficiente de x . Pero si cambiamos $h(x)$ en $h(x+3)=x^2+7x+14$ veremos inmediatamente que el primo 7 divide al coeficiente de x y al término constante, y que 49 no divide a 14. Así, con el cambio introducido, logramos que el polinomio satisficiera el criterio de Eisenstein.

Otro caso notable es el del polinomio ciclotómico para un primo p . Esto es

$$(x^p - 1)/(x - 1) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

Aquí, el polinomio satisface el criterio de Eisenstein, en una nueva variable y , después de establecer $x=y+1$. El coeficiente constante será entonces p ; los otros coeficientes son divisibles por p por las propiedades de los coeficientes binomiales $C(p, k)$ que son $p!$ dividido por algo que no involucra a p .



Prueba elemental

Considérese $f(x)$ como un polinomio módulo p ; esto es, redúzcanse los coeficientes al cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Entonces será $c \cdot x^n$ para una constante c distinta de cero. Dado que dichos polinomios tienen una factorización única, cualquier factorización de $f \bmod p$ resultará en monomios. Ahora, si f no fuese irreducible como polinomio entero, podríamos escribirlo como $g \cdot h$, y $f \bmod p$ como el producto de $g \bmod p$ y $h \bmod p$. Estos últimos deben ser monomios, como acabamos de afirmar, por lo que tendremos que $g \bmod p$ es $d \cdot x^k$ y $h \bmod p$ es $e \cdot x^{n-k}$ donde $c = d \cdot e$.

Vemos ahora que las condiciones dadas sobre $g \bmod p$ y $h \bmod p$ significan que p^2 dividirá a a_0 , lo que contradice nuestra hipótesis. De hecho a_0 será $g(0) \cdot h(0)$ y p divide a ambos factores, como hemos dicho más arriba.

**Helicoteoría****FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS****INTRODUCCIÓN**

La factorización es un proceso de transformación de un polinomio de grado no nulo en una multiplicación indicada de dos o más polinomios también de grados no nulos. La factorización es un proceso inverso a la aplicación de las propiedades de la multiplicación; su operación no está sujeta a reglas, en muchos casos para factorizar un polinomio dependerá bastante de la habilidad que vaya adquiriendo el estudiante. Es importante que el estudiante aplique muchos de los conceptos que maneja en aritmética, como por ejemplo, número primo y divisor ya que estos los usaremos con bastante frecuencia en la presente unidad. En el álgebra, en lugar de hablar de número primo como se hace en la aritmética, hablaremos de factor primo.

CAMPO NUMÉRICO

Un conjunto no vacío A , junto con dos operaciones binarias definidas en él, se dice que forma un “campo” si y solo si estas operaciones verifican ciertas propiedades con cualesquiera de sus elementos, como la asociatividad, la existencia de un elemento neutro en A , la existencia del correspondiente elemento inverso bajo la operación en A , la conmutatividad de cada operación y la distributividad de una de ellas respecto de la otra.

Los campos que usaremos en este tema son: el campo de los números racionales ($\mathbb{Q}$), el campo de los números reales ($\mathbb{R}$) y el campo de los números complejos ($\mathbb{C}$).

POLINOMIO DEFINIDO DENTRO DE UN CAMPO NUMÉRICO

Un polinomio P se dice está definido dentro de un campo numérico si y solo si los coeficientes del polinomio son elementos de dicho campo.

Ejemplos

- $P(x) = 2x^3 - 7x - 4$ está definido en $\mathbb{Q}$, también está definido en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
- $R(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{2}$ no está definido en $\mathbb{Q}$, pero si está definido en $\mathbb{R}$ y también en $\mathbb{C}$.
- $S(x) = 4x^4 + (3 - 2i)x^2 + 5 + 2i$ no está definido ni en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathbb{R}$, pero si está definido en $\mathbb{C}$.

FACTOR DE UN POLINOMIO

Se dice que $D(x)$ es un factor o divisor de $P(x)$ si y solo si $D(x)$ es un polinomio de grado no nulo y la división

$\frac{P(x)}{D(x)}$ es exacta.

Ejemplos

- $x^2 - 1$ es un factor de $x^4 - 1$ en $\mathbb{Q}$, porque $x^2 - 1$ es de grado 2 (no nulo) y la división $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ es exacta.
- $x + \sqrt{2}$ es un factor de $x^2 - 2$ en $\mathbb{R}$, porque $x + \sqrt{2}$ es de grado 1 (no nulo) y la división $\frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}}$ es exacta.
- 3 no es factor de $3x^2 + 3$ en ningún campo, porque 3 es de grado 0 (grado nulo).

POLINOMIO PRIMO O IRREDUCTIBLE

Un polinomio $D(x)$ se dice que es primo o irreducible dentro de un campo numérico si y solo si no admite ser descompuesto como una multiplicación indicada de dos polinomios de grados no nulos. Es decir

$D(x)$ es primo en un campo $K \leftrightarrow \{ \text{si } D(x) = A(x) \cdot B(x) \rightarrow A(x) \vee B(x) \text{ es de grado } 0 \}$

Ejemplos

Los factores primos más comunes son:

- De primer grado: x , y , $x+y$, $x-y$, $3x+7$, etc.
Todo polinomio de primer grado o lineal es primo en el campo, en el que está definido.
- De segundo grado: x^2+1 , x^2+a^2 , x^2+x+1 , x^2-x+1 , x^2+xy+y^2 , x^2-xy+y^2 , etc.
El trinomio cuadrático ax^2+bx+c es primo en $\mathbb{Q}$ si y solo si b^2-4ac no es cuadrado perfecto de algún racional.
- De tercer grado: x^3+7 , x^3-7 , $x^3 \pm A$ es primo si A no es cubo perfecto. x^3+x+1 , x^3-x+1 , etc.

Ejemplos

- Sea el polinomio factorizado $P(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x^2+x+5)^2(x^2+1)^2$, sus factores primos son: $x-1$, $x+1$, x^2+x+5 y x^2+1 , de donde los dos primeros son factores primos lineales y los dos últimos factores primos cuadráticos.
- El polinomio: $N(x)=x^2(x+3)^2(x-5)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ tiene los siguientes factores primos: x , $x+3$, $x-5$, x^2+x+1 y x^2-x+1 , de los cuales los tres primeros factores primos son lineales y los dos últimos factores primos son cuadráticos.

CRITERIOS DE FACTORIZACIÓN

Son procedimientos que se utilizan de forma alternativa para factorizar un polinomio. Es decir, puede que optemos por usar uno de ellos y, sin embargo, no funciona (no se logra la factorización del polinomio); entonces probamos con otro, hasta lograr la factorización del polinomio.

Los criterios pueden ser elegidos de acuerdo a la forma que presenta el polinomio. Los más usados son:

CRITERIO DEL FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Si el polinomio tiene 4 términos o más, de manera que se puedan formar grupos de igual cantidad de términos, y que al ser factorizados por separado cada grupo arrojan un factor común para todos los grupos (en algunos casos se puede agrupar un producto notable), esto conduce a la factorización del polinomio.

Ejemplos

1. Halle el número de factores primos de $C(x)=x^3-2x^2+x+2$.

Resolución

El polinomio tiene 4 términos, agrupamos de 2 en 2 $\rightarrow C(x)=(x^3+2x^2)+(x+2)$, factoricemos cada grupo por separado $\rightarrow C(x)=x^2(x+2)+(x+2)$ como

puedes ver $x+2$ es un factor común para los 2 grupos. Luego

$C(x)=(x+2)(x^2+1)$, entonces tiene 2 factores primos.

2. Factorice $D(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Resolución

El polinomio tiene 6 términos, entonces formamos grupos de 2 en 2 o de 3 en 3.

$$D(x)=(x^5+x^4)+(x^3+x^2)+(x+1)$$

$$D(x)=x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)$$

Luego

$$D(x)=(x+1)[x^4+x^2+1]=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

Identidad de Argand

3. Factorice $E(x)=x^5+2x^4-x^3-2x^2$.

Resolución

$$E(x)=x^2(x^3+2x^2-x-2)=x^2[x^2(x+2)-(x+2)]$$

$$E(x)=x^2(x+2)[x^2-1]=x^2(x+2)(x+1)(x-1)$$

4. Factorice e indique el número de factores primos lineales de $F(x)=x^5-2x^4-16x+32$.

Resolución

$$F(x)=x^4(x-2)-16(x-2)=(x-2)(x^4-16)=(x-2)^2(x^2+4)(x+2)$$

$\rightarrow$ El número de factores primos lineales es 2.

CRITERIO DE LAS IDENTIDADES ALGEBRAICAS

Algunos polinomios son productos notables:

Diferencia de cuadrados	$a^{2m}-b^{2n}=(a^m+b^n)(a^m-b^n)$
Suma y diferencia de cubos	$a^{3m} \pm b^{3n}=(a^m \pm b^n)(a^{2m} \mp a^m b^n + b^{2n})$
Identidad de Argand	$a^{4m}+a^{2m}b^{2n}+b^{4n}=(a^{2m}+a^m b^n+b^{2n})(a^{2m}-a^m b^n+b^{2n})$

Ejemplos

1. Factorice $G(x)=x^9-1$.

Resolución

Como el exponente es múltiplo de 3 por diferencia de cubos

$$G(x)=x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$$

2. Factorice $H(x)=x^8+x^4+1$.

Resolución

Aplicando la identidad de Argand

$$H(x)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

Nuevamente por Argand

$$H(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

CRITERIO DEL ASPA SIMPLE

Cuando un trinomio (3 términos) es de grado par, puede tener 2 factores binómicos.

$$P(x, y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

$$\begin{array}{ccc} A_1 x^m & \nearrow & C_1 y^n \\ A_2 x^m & \searrow & C_2 y^n \end{array}$$

$$\text{Condición } (A_1 x^m)(C_2 y^n) + (A_2 x^m)(C_1 y^n) = B x^m y^n$$

$$\rightarrow P(x, y) = (A_1 x^m + C_1 y^n)(A_2 x^m + C_2 y^n)$$

Ejemplos

- Factorice $I(x) = x^2 + 6x + 8$.

Resolución

Como es un trinomio de segundo grado (grado par) por el aspa simple

$$I(x) = x^2 + 6x + 8$$

$$\begin{array}{ccc} x & \nearrow & 4 \\ x & \searrow & 2 \end{array}$$

$$\text{Condición: } 2x + 4x = 6x$$

$$\text{Luego: } I(x) = (x+4)(x+2).$$

- Factorice $J(x) = x^2 - 5x - 24$.

Resolución

$$J(x) = x^2 - 5x - 24$$

$$\begin{array}{ccc} x & \nearrow & -8 \\ x & \searrow & 3 \end{array}$$

$$\text{Condición: } 3x + (-8x) = -5x$$

$$\rightarrow J(x) = (x+3)(x-8)$$

- Halle el número de factores primos de

$$K(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Resolución

$$K(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \nearrow & -9 \\ x^2 & \searrow & -4 \end{array}$$

$$\rightarrow K(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4), \text{ por diferencia de cuadrados}$$

$$K(x) = (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$$

$$\rightarrow \text{El número de factores primos es 4.}$$

CRITERIO DEL ASPA DOBLE

Cuando un polinomio tiene 6 términos de grado par, puede aceptar 2 factores de 3 términos.

$$P(x, y, z) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx^m z^p + Ey^n z^p + Fz^{2p}$$

$$\begin{array}{ccccc} A_1 x^m & \nearrow & C_1 y^n & \nearrow & F_1 z^p \\ A_2 x^m & \searrow & C_2 y^n & \searrow & F_2 z^p \end{array}$$

Aspa de comprobación (con los extremos)

$$\begin{array}{ccc} & \text{Dx}^m \text{z}^p & \\ A_1 x^m & \nearrow & F_1 z^p \\ A_2 x^m & \searrow & F_2 z^p \end{array}$$

$$\text{Luego: } P(x, y, z) = (A_1 x^m + C_1 y^n + F_1 z^p)(A_2 x^m + C_2 y^n + F_2 z^p)$$

Ejemplos

- Factorice $L(x, y, z) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 7y + 3$.

Resolución

$$L(x, y, z) = x^2 + 3xy + 2y^2 + (4x) + 7y + 3$$

$$\begin{array}{ccc} x & \nearrow & 2y \\ x & \searrow & 1 \end{array}$$

Aspa de comprobación (con los extremos)

$$\begin{array}{ccc} & 4x & \\ x & \nearrow & 1 \\ x & \searrow & 3 \end{array}$$

$$\text{Luego: } L(x, y, z) = (x+2y+1)(x+y+3)$$

- Factorice $M(x, y, z) = 2x^2 + 7xy + 6y^2 + 7xz + 10yz - 4z^2$.

Resolución

$$M(x, y, z) = 2x^2 + 7xy + 6y^2 + (7xz) + 10yz - 4z^2$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & \nearrow & 3y \\ 1x & \searrow & 2y \end{array}$$

Aspa de comprobación

$$\begin{array}{ccc} & 7xz & \\ 2x & \nearrow & -z \\ x & \searrow & 4z \end{array}$$

$$\text{Luego: } M(x, y, z) = (2x+3y-z)(x+2y+4z).$$

CRITERIO DEL ASPA DOBLE ESPECIAL

Cuando en un aspa doble el término central es semejante al aspa de comprobación se reducen a un término y solo aparecen 5 términos, este es el caso del aspa doble especial. Primero se comienza con los extremos para hallar el aspa de comprobación y luego se calcula el verdadero término central.

Ejemplos

- Factorice $N(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 5$.

Resolución

Tiene 5 términos, el término central es x^2 y el aspa de comprobación es x^2 .

→ Obtengamos el aspa de comprobación con los términos extremos.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Término central} & \\ & 12x^2 & \\ & \text{comprobación} & \\ N(x) = x^4 + 5x^3 + \boxed{6x^2} + \boxed{6x^2} + 17x + 5 \\ \begin{array}{ccc} x^2 & \nearrow & 2x \\ x^2 & \searrow & 3x \end{array} & & \begin{array}{ccc} & \nearrow & 5 \\ & \searrow & 1 \end{array} \end{array}$$

Si el aspa de comprobación es $6x^2$, y el polinomio tiene $12x^2$, entonces el término central será $12x^2 - 6x^2 = 6x^2$

$$\rightarrow N(x) = (x^2 + 2x + 5)(x^2 + 3x + 1)$$

2. Factorice $Q(x) = 2x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 22x + 8$.

Resolución

Desdoblando el término $15x^2$ como $5x^2 + 10x^2$, se tiene

$$Q(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 10x^2 + 22x + 8$$

$$Q(x) = (2x^2 + 5x + 2)(x^2 + x + 4)$$

$$Q(x) = (2x + 1)(x + 2)(x^2 + x + 4)$$

4. Halle el número de factores primos de

$$P(x) = 12x^4 - 8x^3 + 25x^2 + 2x - 7$$

Resolución

Desdoblando el término $25x^2$ como $0x^2 + 25x^2$, se tiene

$$P(x) = 12x^4 - 8x^3 + 0x^2 + 25x^2 + 2x - 7$$

$$P(x) = (4x^2 - 2x + 1)(3x^2 - 2x + 7)$$

$$\rightarrow P(x) = (2x + 1)(2x - 1)(3x^2 - 2x + 7)$$

Luego, el número de factores primos es 3.

CRITERIO DE LOS DIVISORES BINÓMICOS

Teorema del factor: Un polinomio tiene un factor lineal o de primer grado de la forma $(Ax + B)$ o $(x \pm a)$

$\leftrightarrow$ El polinomio se anula con $x = -\frac{B}{A}$ o $x = \pm a$, $A \neq 0$.

donde a aquel factor lineal también se le llama divisor binómico.

Tratamos de buscar divisores binómicos y además el TI del divisor tiene que ser un divisor del polinomio.

Es decir, si $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, el posible divisor binómico, será $x \pm a$, donde

$a = \frac{\text{Cualquier divisor del término independiente}}{\text{Cualquier divisor del coeficiente principal}}$

Ejemplos

1. Factorice $S(x) = x^3 + x - 10$.

Resolución

Los posibles divisores binómicos son: $x \pm 1$; $x \pm 2$; $x \pm 5$; $x \pm 10$, donde 1; 2; 5 y 10 son divisores del término independiente 10.

Probemos con $x - 2$.

Dividiendo por la regla de Ruffini

	1	0	1	-10
$(x-2) \leftarrow x=2$	↓	2	4	10
	1	2	5	0
	$x^2 + 2x + 5$			Resto

$$\rightarrow S(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$$

2. Halle el factor primo cuadrático de

$$U(x) = x^3 + 2x^2 - x - 42$$

Resolución

Los posibles divisores binómicos son: $x \pm 1$; $x \pm 2$; $x \pm 3$; $x \pm 6$; $x \pm 7$; $x \pm 21$; $x \pm 42$.

Probemos con $x - 3$.

Por Ruffini

	1	2	-1	-42
$(x-3) \leftarrow x=3$	↓	3	15	42
	1	5	14	0

$$\rightarrow U(x) = (x - 3)(x^2 + 5x + 14)$$

Luego, el factor primo cuadrático es $x^2 + 5x + 14$.

3. Factorice $T(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x + 9$

Resolución

Como el primer coeficiente es 2; los posibles números de prueba son: $a = \pm \frac{\text{Divisores de 9}}{\text{Divisores de 2}}$, es decir

$$a = \pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{9}{2}$$

Luego, escogemos $-\frac{3}{2}$.

	2	3	2	9	9
$x + \frac{3}{2} \leftarrow x = -\frac{3}{2}$	↓	-3	0	-3	-9
	2	0	2	6	0
	$2x^3 + 0x^2 + 2x + 6$				

$$T(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^3 + 2x + 6) = \left(\frac{2x+3}{2}\right)(2)(x^3 + x + 3)$$

$$\rightarrow T(x) = (2x+3)(x^3 + x + 3)$$

ARTIFICIOS DIVERSOS

Para facilitar la factorización se puede hacer uso de los siguientes artificios:

Cambio de variable: Cuando se repite una misma expresión en el polinomio, se usa el cambio de variable.

Ejemplos

1. Factorice el polinomio

$$V(x) = (x^2 + x + 2)^2 - 5(x^2 + x + 2) + 6$$

Resolución

Haciendo el cambio de variable $x^2 + x + 2 = a$

Con lo cual, el polinomio quedará así

$$V = a^2 - 5a + 6 = (a - 3)(a - 2)$$

Como $a = x^2 + x + 2$, entonces reponiendo

$$V(x) = (x^2 + x + 2 - 3)(x^2 + x + 2 - 2)$$

Luego

$$V(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + x) = x(x + 1)(x^2 + x - 1)$$

2. Factorice el polinomio

$$A(x) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 6(x^2 + 3x + 1) + 5$$

Resolución

Haciendo cambio de variable $a = x^2 + 3x + 1$, entonces

$$A = a^2 - 6a + 5 = (a - 1)(a - 5)$$

Luego, restituyendo

$$A(x) = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 - 5)$$

$$A(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 4)$$

$$A(x) = x(x + 3)(x + 4)(x - 1)$$

Agrupación adecuada: Aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación y en forma adecuada para luego hacer un cambio de variable, se simplifica el proceso operativo.

Ejemplos

1. Factorice $B(x) = (x + 2)(x + 3)(x + 5)(x + 6) - 40$.

Resolución

Agrupemos los factores de 2 en 2 tal que resulta una expresión repetida; para ello la suma de términos independientes en cada grupo debe ser una misma cantidad.

$$B(x) = [(x + 2)(x + 6)][(x + 3)(x + 5)] - 40$$

$$B(x) = \underbrace{(x^2 + 8x + 12)}_a \underbrace{(x^2 + 8x + 15)}_a - 40$$

$$B(x) = (a + 12)(a + 15) - 40$$

$$B(x) = a^2 + 27a + 180 - 40$$

$$B(x) = a^2 + 27a + 140 \rightarrow B(x) = (a + 20)(a + 7)$$

Reponiendo la variable inicial, es decir, reemplazando a

$$B(x) = (x^2 + 8x + 20)(x^2 + 8x + 7)$$

$$B(x) = (x^2 + 8x + 20)(x + 7)(x + 1)$$

2. Halle el número de factores primos lineales de

$$C(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)(x + 6) - 16$$

Resolución

$$C(x) = \underbrace{(x^2 + 4x + 3)}_a \underbrace{(x^2 + 4x - 12)}_a - 16$$

$$C(x) = (a + 3)(a - 12) - 16 = a^2 - 9a - 36 - 16$$

$$C(x) = a^2 - 9a - 52 = (a - 13)(a + 4)$$

$$C(x) = (x^2 + 4x - 13)(x^2 + 4x + 4)$$

$C(x) = (x^2 + 4x - 13)(x + 2)^2 \rightarrow$ El número de factores primos lineales es 1.

Sumas y Restas: Quita y Pon

Para completar cuadrados o para obtener un producto notable, se suma y resta una misma cantidad para luego agrupar y factorizar.

Ejemplos

1. Factorice $D(x) = x^4 + 15x^2 + 64$

Resolución

Cuando el polinomio es de grado par se busca un trinomio cuadrado perfecto y, como consecuencia de esto, resulta una diferencia de cuadrados a la vez. En nuestro caso sumando y restando x^2

$$D(x) = x^4 + \underbrace{15x^2 + x^2}_{8} + 64 - x^2$$

Luego $D(x) = (x^2 + 8)^2 - x^2$ por diferencia de cuadrados $D(x) = (x^2 + 8 + x)(x^2 + 8 - x)$, entonces $D(x) = (x^2 + x + 8)(x^2 - x + 8)$.

2. Factorice $E(x) = x^5 + x + 1$.

Resolución

Cuando el polinomio es de grado impar, se busca generalmente una suma o diferencia de cubos. En nuestro caso le sumamos y restamos x^2 .

$$E(x) = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1, \text{ agrupando}$$

$$E(x) = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$$

$$E(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$E(x) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$E(x) = (x^3 - x^2)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$E(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$



FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Campo numérico

Los campos numéricos usuales son

$\mathbb{Q}$, el campo de los números racionales

$\mathbb{R}$, el campo de los números reales

$\mathbb{C}$, el campo de los números complejos

Polinomio definido en un campo numérico

Factor o divisor de un polinomio

Polinomio primo o irreducible

* Todos polinomio lineal $(ax + b; ax + by + c; \dots)$ es primo en el campo

$\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{Q}; \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

Criterios para factorizar polinomios

1. Criterio del factor común por agrupación de términos
2. Criterio de las identidades
3. Criterio del aspa simple $(Ax^{2m} + Bx^n + C \text{ o } Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n})$
4. Criterio del aspa doble $(Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n} + Dx^m + Ey^n + F)$
5. Criterio del aspa doble especial $(Ax^{4m} + Bx^{3m} + Cx^{2m} + Dx^m + E)$
6. Criterios de los divisores binomios
7. Artificios diversos: quita y pon
cambios de variables



Problemas resueltos

1. Factorice

$$E = \underline{x^6y} + \underline{x^4z^3} - \underline{x^6z} + \underline{y^6z} - \underline{x^4y^2z} - \underline{x^2y^5} - \underline{y^4z^3} + \underline{x^2y^4z}$$

Resolución

Agrupemos los que tienen igual señal extraigamos factores comunes:

$$E = x^2y(x^4 - y^4) + z^3(x^4 - y^4) - x^2z(x^4 - y^4) - y^2z(x^4 - y^4)$$

Extrayendo el factor común al polinomio:

$$E = (x^4 - y^4)(x^2y + z^3 - x^2z - y^2z)$$

Agrupando al interior del segundo paréntesis

$$E = (x^4 - y^4)[x^2(y - z) - z(y^2 - z^2)]$$

$$E = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)[x^2(y - z) - z(y + z)(y - z)]$$

Finalmente:

$$E = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(y - z)(x^2 - zy - z^2)$$

$$\text{Rpta.: } E = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(y - z)(x^2 - zy - z^2)$$

2. Factorice

$$E = ab^2c^4 - a^4b^2c + a^2b^4c - a^2bc^4 + a^4bc^2 - ab^4c^2$$

Resolución

Agrupando y factorizando por parejas:

$$E = ab^2c^2(c^2 - b^2) + a^4bc(c - b) - a^2bc(c^3 - b^3)$$

Descomponiendo en sus factores, diferencia de cuadrados y diferencia de cubos:

$$E = ab^2c^2(c + b)(c - b) + a^4bc(c - b) - a^2bc(c - b)(c^2 + cb + b^2)$$

Factorizando:

$$E = abc(c - b)(\underline{bc^2} + \underline{b^2c} + \underline{a^3} - \underline{ac^2} - \underline{acb} - \underline{ab^2})$$

Agrupando por parejas en la forma señaladas:

$$E = abc(c - b)[c^2(b - a) + bc(b - a) - a(b + a)(b - a)]$$

Factorizando $(b - a)$ en el corchete:

$$E = abc(c - b)(b - a)(c^2 + bc + ab - a^2)$$

Agrupando y factorizando en el tercer paréntesis:

$$E = abc(c - b)(b - a)[(c + a)(c - a) + b(c - a)]$$

Finalmente

$$E = abc(c - b)(b - a)(c - a)(a + b + c)$$

$$\text{Rpta.: } E = abc(c - b)(b - a)(c - a)(a + b + c)$$

3. Factorice

$$E = (a + d)^4 - 2(b^2 + c^2)(a + d)^2 + (b^2 - c^2)^2$$

Resolución

Haciendo $(a + d)^2 = x$, y desarrollando el tercer término.

$$(b^2 - c^2)^2 = [(b + c)(b - c)]^2 = (b + c)^2(b - c)^2$$

Se obtiene

$$E = x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b + c)^2(b - c)^2$$

Aplicando aspa simple, donde:

$$x^2 = (x)(x)$$

$$(b + c)^2(b - c)^2 = [-(b + c)^2][-(b - c)^2]$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -(b + c)^2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & x & \\ & \nearrow & \searrow \\ & -(b - c)^2 & \end{array}$$

Comprobación para el término central:

$$\begin{aligned} -(b - c)^2x - (b + c)^2x &= -[(b + c)^2 + (b - c)^2]x \\ &= -2(b^2 + c^2)x \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$E = [x - (b + c)^2][x - (b - c)^2]$$

Reemplazando el valor x :

$$E = [(a + d)^2 - (b + c)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2]$$

Factorizando la diferencia de cuadrados:

$$E = [(a + d)(b + c)][(a + d) - (b + c)][(a + d) + (b - c)][(a + d) - (b - c)]$$

Finalmente:

$$E = (a + d + b + c)(a + d - b - c)(a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

$$\text{Rpta.: } E = (a + d + b + c)(a + d - b - c)(a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

4. Factorice

$$x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$$

Resolución

Completando el polinomio con $0x$ y descomponiendo a los términos extremos:

$$\begin{array}{ccccc} & & x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 0x + 4 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x^2 & & & & -4 = \frac{(1)}{-4x^2} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & -4x & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x^2 & & & & -1 = \frac{-x^2}{-5x^2} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & +x & & \end{array}$$

Falta: $-9x^2 - (-5x^2) = -4x^2$

Verificación del aspa doble:

$$\begin{array}{r} \text{(II)} \quad x^3 \\ -4x^3 \\ \hline -3x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{(III)} +4x \\ -4x \\ \hline 0x \end{array}$$

El polinomio factorizado es:

$$(x^2 - 4x - 4)(x^2 + x - 1)$$

Rpta.: $(x^2 - 4x - 4)(x^2 + x - 1)$

5. Factorice

$$x^7 + x^5 - 1$$

Resolución

Sumando y restando x :

$$E = x^7 - x + x^5 + x - 1 \quad \text{(I)}$$

Previamente, veamos que:

$$(x^7 - x) = x(x^6 - 1) = x(x^3 + 1)(x^3 - 1)$$

$$(x^7 - x) = x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 - 1) \quad \text{(a)}$$

También por el ejercicio numérico (ii)

$$x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) \quad \text{(b)}$$

Sustituyendo (a) y (b) en (I):

$$E = x(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 - 1) + (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$$

$$E = (x^2 - x + 1)(x^5 - x^2 + x^4 - x + x^3 + x^2 - 1)$$

Finalmente:

$$E = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 - x - 1)$$

Rpta.: $E = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 - x - 1)$



Helicopráctica

Nivel I

1. Al factorizar en $\mathbb{Z}$ el polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$$

indique el número de factores obtenidos.

Resolución

2. Determine un factor de

$$P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Resolución

3. Se define el polinomio

$$P(x, y, z) = x^3y^3 + xz^3 + z^3y + x^3y^4 + x^3y^3z + z^4$$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

- I. $P(x, y, z)$ es divisible por $x+y+z$.
- II. Un divisor de $P(x, y, z)$ es x^2+y^2 .
- III. $P(x, y, z)$ es divisible entre $xy+z$ o $x+yz$.

Resolución

Nivel II

5. Factorice $P(x, y, z) = 5(x+y)^2 - (x+z)^2 - 5(y-z)^2$ e indique sus factores primos.

Resolución

4. Determine uno de los factores primos del polinomio

$$P(x, y, z) = x^4 - y^4 - z^4 - 2x^2yz - y^2z^2$$

Resolución

6. Factorice $P(x, y, z) = 9x^2 - 4y^2 + 4yz - 12x + 4 - z^2$ e indique sus factores primos.

Resolución

Nivel III

7. Determine la suma de coeficientes del factor primo de mayor grado del polinomio

$$P(x) = x^5 + x^4 + x^2 - 5x + 2$$

Resolución

9. Si $P(x, y, z) = 5(x^2 + y^2 - z^2) + 10xy + 2(x + y + z)^2 + 2(x + y - z)^2$ es un polinomio factorizable, indique un factor primo.

Resolución

8. El siguiente polinomio:

$$P(x) = ax^4 + (a^2 - 1)x^3 - ax^2 + (a^2 + 1)x - a; a \neq 0$$

es factorizable, entonces la suma de coeficientes de un factor primo es

Resolución

10. Calcule la suma de coeficientes de un factor primo de $P(x) = (1 + x^2)(1 - x^2)^2 + (x - x^2)^2$.

Resolución

11. Determine un factor primo de

$$E = (a+b-2c)^3 + (a+c-2b)^3 + (b+c-2a)^3$$

Resolución

12. Indique el número de factores primos de

$$P(x, y) = 4x^8 + 4x^6 + x^4y^4 + 4x^4 + y^4 + x^2y^4$$

Resolución**Helicotaller****Nivel I**

1. Indique el número de factores primos en
- $\mathbb{R}$
- de

$$P(x) = 8x^6 - 91x^3 + 216$$

Resolución

2. Indique el número de factores primos lineales de

$$P(x) = 7x^5 + x^4 - 70x^3 - 10x^2 + 63x + 9$$

Resolución

3. Factorice

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

y determine la suma de sus factores primos lineales.

Resolución

5. En relación al polinomio

$$P(x) = 128x^3 + 352x^2 + 82x + 5$$

¿cuáles de los siguientes enunciados son correctos?

- Tiene tres factores primos diferentes.
- La suma de los factores primos es $10x + 7$.
- Una raíz es $-\frac{5}{4}$.

Resolución

Nivel II

4. Factorice y determine uno de los factores de

$$P(x, y) = (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)$$

Resolución

6. Indique un factor primo de

$$z^3x^2 - y^3x^2 + 2xz^2 - xyz + 2y^2x + z - x$$

Resolución

Nivel III

7. Halle el valor m si los polinomios

$$P(x) = x^3 + mx^2 - 5x - 6$$

$$Q(x) = x^3 + (m-3)x^2 - 17x - 15$$

tienen dos factores comunes.

Resolución

8. $P(x, y) = abx^2 - bcy^2 + aby - a^2x - b^2xy + c^2y + bcx - ac + acxy$ es un polinomio factorizable. Halle un factor primo.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. $P(x, y) = x^2 + 8x + 15 + 6xy + 9y^2 + 24y$ es un polinomio factorizable que tiene 2 factores lineales. Determine la suma de estos dos factores.

- A) $2x - 5y + 5$ B) $2x + 4y + 4$
 C) $2x - 2y + 7$ D) $2x + 6y + 8$
 E) $2x + y - 3$

2. $P(x, y) = x^2(x - 3y)^2 + 2xy^2(3y - x) - 8y^4$ es un polinomio factorizable. Halle el número de factores primos.

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

Nivel II

3. Determine un factor primo del polinomio $P(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ si los coeficientes a, b, c, d, e y f en ese orden son números enteros consecutivos cuya suma es 27.

- A) $x + 2y + z$ B) $x + y + z$
 C) $2x + 3y + z$ D) $2x + y + 4z$
 E) $x + y + 4z$

4. Calcule la suma de coeficientes del factor primo cuadrático de

$$G(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 6$$

- A) 1 B) 2 C) 4
 D) 6 E) 8

Nivel III

5. Indique un factor primo de la expresión

$$(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2$$

- A) $x + z$ B) $x + y - z$ C) $y^2 + x$
 D) $y + x$ E) $x^2 + y$



Test 2

Nivel I

1. Calcule la suma de coeficientes del factor primo cuadrático del polinomio

$$L(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 9x + 18$$

- A) 5 B) 1 C) 3
D) -2 E) 4

2. ¿Cuántos factores primos tiene el siguiente polinomio?

$$P(x) = x^{10} + x^8 + x^6 - x^4 - x^2 - 1$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

4. Calcule la suma de los coeficientes de uno de los factores de $x^5 + x^4 + 2x^2 + 1$.

- A) 0 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Nivel III

5. ¿Cuántos factores lineales admite el polinomio $f(x) = x^4 + 8x^2 + 36$?

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Nivel II

3. Si el polinomio $P(x) = x^{12} - 6x^8 + 5x^4 + 2x^6 - 6x^2 + 1$ es factorizable, entonces un factor es

- A) $x^6 + x^2 + 1$. B) $x^6 + 5x^2 + 1$.
C) $x^6 - 5x^2 - 1$. D) $x^6 - x^2 - 1$.
E) $x^6 - 5x^2 + 1$.



Helicodesafío

1. Calcule la suma de los coeficientes de un factor primo de

$$P(a, b) = a^5 + b^5 + ab(a+b)(a^2 + b^2)$$

- A) -2 B) -1 C) 3
D) 0 E) -3

2. La suma de los factores primos de

$$P(x) = (x-3)^4 - 5x(x-6) - 41$$

es

- A) $2x-3$. B) $4x-12$. C) $2x+7$.
D) $x+3$. E) $4x+1$.

3. Si Q es un polinomio factorizable, definido por

$$Q(x, y) = 2x^2 + 1 - (4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

determine un factor primo de Q.

- A) x^2+x+1 B) $3xy-y+1$ C) $2xy-2$
D) $x+y-y^2$ E) $1-2xy-y^2$

4. En relación al polinomio

$$P(x) = 4(x^2+x+1)^3 - 27x^2(x+1)^2$$

¿cuáles de los siguientes enunciados son correctos?

- I. Es divisible por $x-1$.
II. Un factor primo es $2x+1$.
III. La suma de los factores primos es $4x+2$.

- A) I, II y III B) Solo I C) Solo II
D) Solo III E) I y III

5. En relación al polinomio $2(a^4+b^4+c^4+d^4) - (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 + 8abcd$, indique la veracidad de los siguientes enunciados.

- I. Un factor primo es $a+b+c+d$.
II. Un factor primo es $a+b-c-d$.
III. Existen cuatro factores primos lineales.

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I, II y III

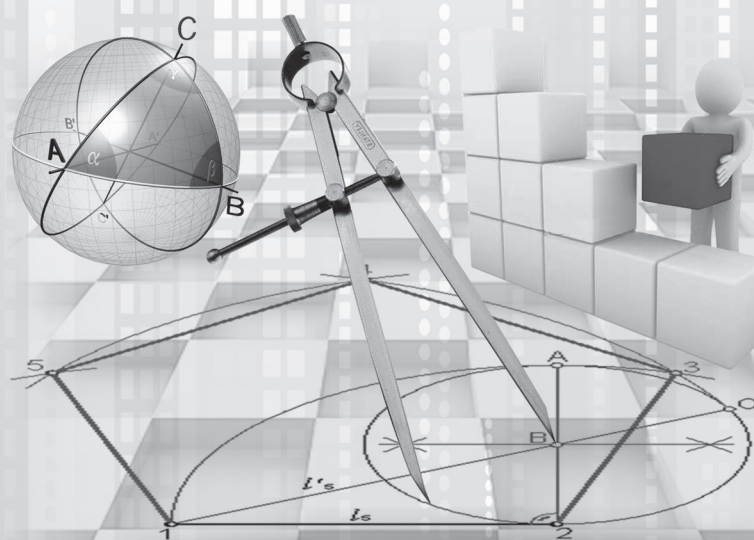


Bibliografía y cibergrafía

Capítulos 1, 2, 3 y 4

- Álgebra preuniversitaria. Editorial San Marcos.
- BECHEANU, Mircea, *International Mathematics Olympiads 1959-2000*. Maryland: Academic Distribution Center, 2001.
- COURANT, Richard. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. Editorial Fondo de Cultura Económica, México, 2010.
- ESPINOZA RAMOS, Eduardo. *Matemática básica*.
- HALL y KNIGHT. *Álgebra superior*. Uteha Editorial. Mexico D. F., 1974.
- HERNÁNDEZ, Hernán. *Aritmética*. Editorial Proyecto Ingenio S. A. C. Lima, 2008.
- LAGES, Elon. *Análisis real*. IMCA-UNI. Lima, 1997.
- LÁZARO, Moisés. *Matemática básica*.
- POTÁPOV M.; ALEXÁNDRO V. y PASICHENKO, P. *Álgebra y análisis de funciones elementales*. Editorial Mir. Moscú, 1986.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

LA GEOMETRÍA



Objetivos

- Conoce qué es la geometría.
- Conoce los conceptos básicos, como el punto, la recta, la figura geométrica, etc.
- Reconoce cuándo una figura geométrica es un conjunto convexo o no convexo.



Sabías que...

¿Qué es la geometría?

La geometría es una parte de la matemática que trata de estudiar unas idealizaciones del espacio en que vivimos, que son los puntos, las rectas y los planos, y otros elementos conceptuales derivados de ellos, como polígonos o poliedros.

En la práctica, la geometría sirve para solucionar problemas concretos en el mundo de lo visible. Entre sus utilidades se encuentran la justificación teórica de muchos instrumentos: compás, teodolito, pantógrafo, sistema de posicionamiento global. También es la que nos permite medir áreas y volúmenes, es útil en la preparación de diseños, e incluso en la fabricación de artesanías.

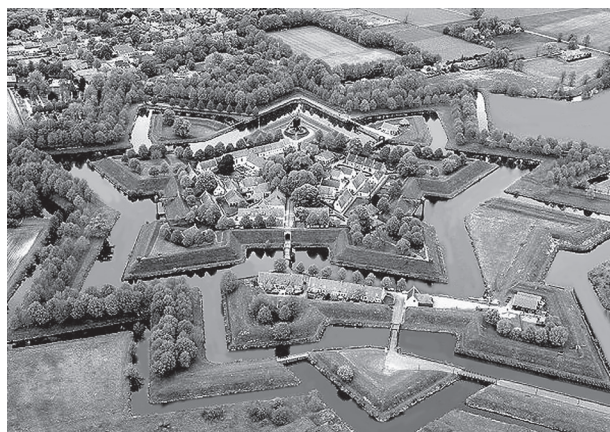
La geometría clásica o axiomática es una matemática en la cual los objetos, en vez de ser números, son puntos, rectas, planos y otras figuras definidas en función de estas.

Figuras geométricas

El avance de la geometría depende fuertemente del avance en las definiciones, las propiedades de los triángulos son posibles de enunciar sin hacer referencia a estos, pero sería un proceso largo tedioso e inútil.

- Figuras fundamentales: punto, recta y plano.
 - En la recta se pueden ver: segmentos, semirrectas y rayos.
 - En el plano, una recta determina dos semiplanos.
 - Utilizando el concepto de distancia, se definen: el círculo y la esfera.
 - Utilizando el concepto de semiespacio se definen: el diedro, el espacio prismático, el triedro, el ángulo poliedro, y los poliedros.
- Entre los últimos encontramos como casos particulares: el tetraedro, el prisma, la pirámide y el paralelepípedo.
- El concepto de círculo en el espacio da origen a: el cono y el cilindro

En la vida diaria podemos observar las diferentes figuras geométricas:



Los ángulos forman parte de la naturaleza





LA GEOMETRÍA

Definición

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que se encarga del estudio de las figuras geométricas (la palabra geometría proviene de: *geo*, que significa tierra y *metría*, que significa medida).

Elementos

La geometría para desarrollarse requiere de elementos fundamentales, los cuales no pueden ser definidos, pero sí representados, estos son: el punto, la recta y el plano.

Se considera al **espacio** como el conjunto de todos los puntos.

Se denomina *figura geométrica* a cualquier conjunto no vacío de puntos del espacio.

Postulado de la recta

Dos puntos cualesquiera diferentes determinan una recta y solamente una.



Notación

Dados los puntos diferentes A y B denotaremos mediante el símbolo $\overleftrightarrow{AB}$ a la recta que los contiene. También se puede denotar con una letra como $\mathcal{L} = \overleftrightarrow{PQ}$.

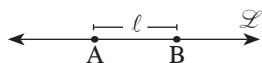
Postulado de la distancia

A cada par de puntos diferentes le corresponde un único número real positivo que se denomina distancia entre dichos puntos.

Si los puntos son A y B, entonces la distancia entre A y B es denotada como AB. Si A y B es el mismo punto se tiene que $\overline{AB} = 0$.

Definición

Sean los puntos A y B distintos de la recta $\mathcal{L}$, se denomina segmento de recta al conjunto formado por los puntos A y B, y todos los puntos que están entre A y B, se denota por $\overline{AB}$, es decir $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X / A-X-B\}$.

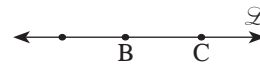


Notación:

La longitud del segmento es el número AB. En la figura se observa que: $AB = l$.

Definición

Sean A, B y C tres puntos diferentes de la recta $\mathcal{L}$. El punto B está entre A y C si $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

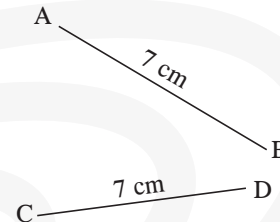


Notación:

Si B está entre A y C, se denota como A - B - C.

Definición

Dos segmentos cualesquiera son congruentes si tienen la misma longitud.



Notación:

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes, entonces esto se denota como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Definición

Se denomina punto medio de un segmento, al punto que pertenece al segmento y determina en él dos segmentos congruentes.



En la figura:

Si $M \in \overline{AB}$ y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, entonces M es punto medio de $\overline{AB}$.

Definición

Sean O y A dos puntos de una recta $\mathcal{L}$, se denomina *rayo* al conjunto que resulta de la unión del segmento $\overline{OA}$ y de todos los puntos M, tales que A está entre O y M.



Notación:

Rayo $OA \equiv \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA} = \overline{OA} \cup \{M / O-A-M\}$

El punto O se denomina origen del rayo.

Definición

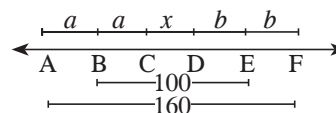
Si a un rayo se le omite el origen, al conjunto de puntos restantes se denomina *semirrecta* $\overrightarrow{OA}$ y se denota por $\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \{O\}$$

Ejemplo

- En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, tal que B es punto medio de $\overline{AC}$ y E es punto medio de $\overline{DF}$. Si $AF=160$ u y $BE=100$ u, entonces la longitud, en u, del $\overline{CD}$ es

- A) 25. B) 30. C) 35.
D) 40. E) 45.

Resolución

Piden: $CD=x$

Del gráfico: $100=a+x+b \dots (1)$

$$160=a+100+b \dots (2)$$

De (2): $a+b=60$

En (1): $100=60+x$

$$\therefore x=40$$

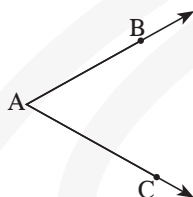
ÁNGULO**Definición**

Se denomina *ángulo* a la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo origen.

Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo BAC se denota como $\angle BAC$.

Donde A es el vértice del ángulo.

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados del ángulo.



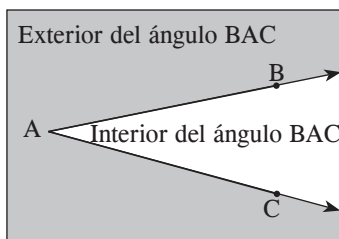
Notación:

Ángulo BAC $\equiv \angle BAC$

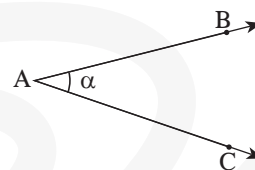
$$\angle BAC = \{\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} / C \notin \overrightarrow{AB}\}$$

Interior y exterior de un ángulo

Todo ángulo separa al plano que lo contiene en dos conjuntos de puntos disjuntos denominados interior y exterior del ángulo.

**Postulado de la medida de un ángulo**

A cada ángulo le corresponde un único número real comprendido entre 0° y 180° , a dicho número se denomina medida de dicho ángulo.

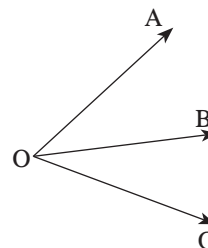


Sea α el número real tal que: $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

α : medida del ángulo BAC. $m\angle BAC = \alpha$

Ángulos adyacentes**Definición**

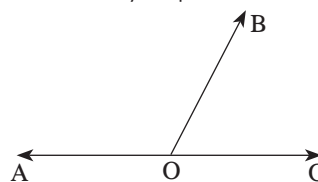
Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común pero sus interiores son disjuntos.



En la figura, los ángulos AOB y BOC son adyacentes

**Anotación**

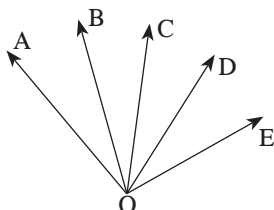
Se denomina par lineal a dos ángulos adyacentes, cuyos lados no comunes son rayos opuestos.



En la figura, los ángulos AOB y BOC forman un par lineal.

Ángulos consecutivos

Tres o más ángulos se denominan consecutivos si son adyacentes dos a dos.



En la figura, los ángulos AOB, BOC, COD y DOE son consecutivos.

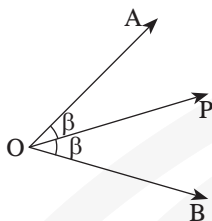


Anotación

Dos ángulos son congruentes si sus medidas son iguales.

Definición

Dado un ángulo AOB y P un punto en su interior, el rayo $\overrightarrow{OP}$ se denomina *bisectriz* del ángulo AOB si $m\angle AOP = m\angle POB$



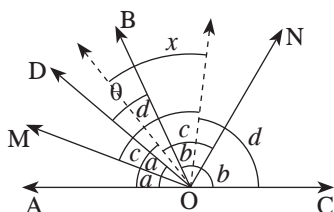
En la figura, P es un punto del interior del ángulo AOB, tal que $m\angle AOP = m\angle POB = \beta$, entonces $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo AOB.

Ejemplo

- En un par lineal AOB-BOC se trazan el rayo $\overrightarrow{OD}$ en el interior del $\angle AOB$ y las bisectrices $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ de los ángulos $\angle AOD$ y $\angle BOC$, respectivamente. Si $m\angle DOB = \theta < 20^\circ$, entonces la medida del ángulo que determinan las bisectrices de los ángulos AON y MOC es

- A) $45^\circ - \frac{\theta}{2}$ B) $45 - \frac{3\theta}{2}$ C) $45 - \frac{\theta}{4}$
D) $45^\circ - \frac{3\theta}{4}$ E) $35 - \frac{3\theta}{4}$

Resolución



Piden: x

Del gráfico: $c + x = a + d$
 $d + x = b + c$

$$\text{Sumando: } 2x = a + b \dots (1)$$

$$\text{También: } 2a + 2b = 180^\circ - \theta$$

$$\text{Entonces: } a + b = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

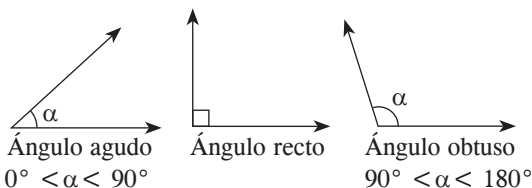
Reemplazando en (1) se obtiene

$$\therefore x = 45^\circ - \frac{\theta}{4}$$

Clasificación

Los ángulos se clasifican según sus medidas en:

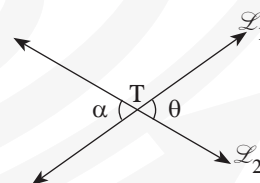
- Ángulo agudo: su medida está entre 0° y 90° .
- Ángulo recto: su medida es 90° .
- Ángulo obtuso: su medida está entre 90° y 180° .



Posiciones relativas de dos rectas en un plano

Definición

Dos rectas se intersectan (son secantes) si y solo si tienen un punto en común



El gráfico muestra a las rectas secantes L_1 y L_2 .

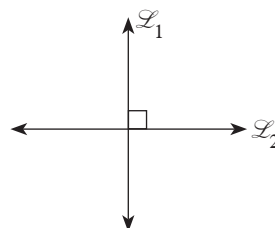
$$L_1 \cap L_2 = \{T\}$$

$$\alpha = \theta$$



Anotación

Dos rectas secantes se denominan perpendiculares cuando uno de los ángulos determinados por dichas rectas es un ángulo recto.



En el gráfico, las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces se denota como $L_1 \perp L_2$.

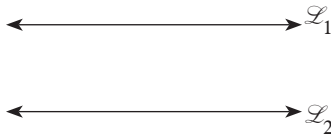


Anotación

Dos segmentos son perpendiculares si las rectas que los contienen son perpendiculares.

Definición

Dos rectas coplanares son paralelas si no tienen puntos en común.



La figura muestra a las rectas paralelas L_1 y L_2 , esto se denota como $L_1 \parallel L_2$.

Ejemplo

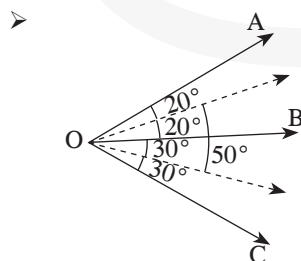
- Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.
- La bisectriz de un ángulo es una semirrecta. ()
- Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares. ()
- A todo ángulo le corresponde un único número real positivo comprendido entre 0° y 180° . ()

- A) FFF B) FFV C) FVV
D) VFV E) VVV

Resolución

- La bisectriz de un ángulo es un rayo cuyo origen es el vértice de dicho ángulo.

Falso



Las bisectrices de dos ángulos adyacentes no necesariamente son perpendiculares.

Falso

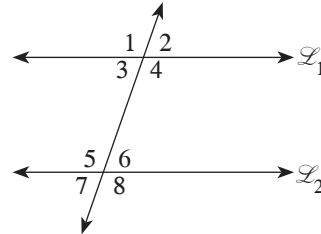
- A todo ángulo le corresponde un único número real positivo mayor que 0° y menor que 180° al cual se denomina medida de dicho ángulo.

Verdadero

∴ FFV

Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una recta transversal o secante

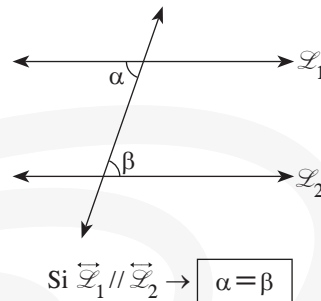
Toda recta secante a dos rectas paralelas determina con cada una de ellas cuatro ángulos, las cuales tienen un nombre en particular por la posición en la que se ubican:



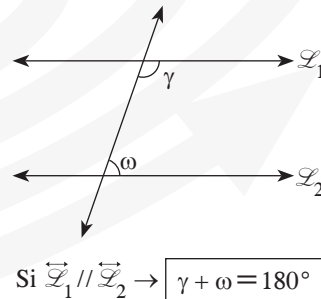
Ángulos internos: 3, 4, 5 y 6

Ángulos externos: 1, 2, 7 y 8

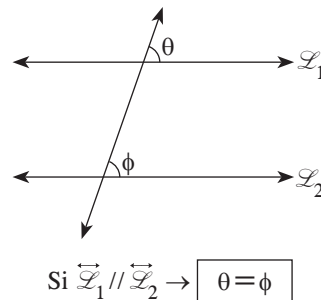
Ángulos alternos



Ángulos conjugados

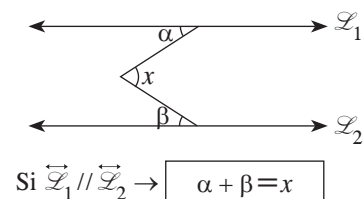


Ángulos correspondientes

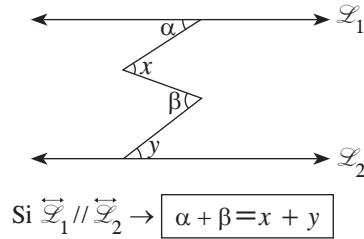


Teoremas

1.



2.



Conjunto convexo

Definición

Un conjunto A de puntos se denomina *conjunto convexo* si todo segmento cuyos extremos son dos puntos cualesquiera de A están contenido en A , así

A es conjunto convexo $\Leftrightarrow \forall P, Q \in A, \overline{PQ} \subset A$
en caso contrario se denomina *conjunto no convexo*.

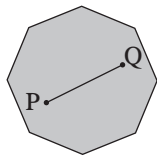


Fig. 1

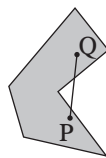


Fig. 2

En la figura (1) se muestra un conjunto convexo.

En la figura (2) se muestra un conjunto no convexo.

Ejemplos

- Conjuntos convexos: Una recta, un rayo, un segmento de recta, un círculo, el interior de un ángulo, una esfera, etc.
- Conjuntos no convexos: El exterior de un ángulo, un ángulo, el exterior de un cuadrado, una circunferencia, el exterior de una esfera, etc.

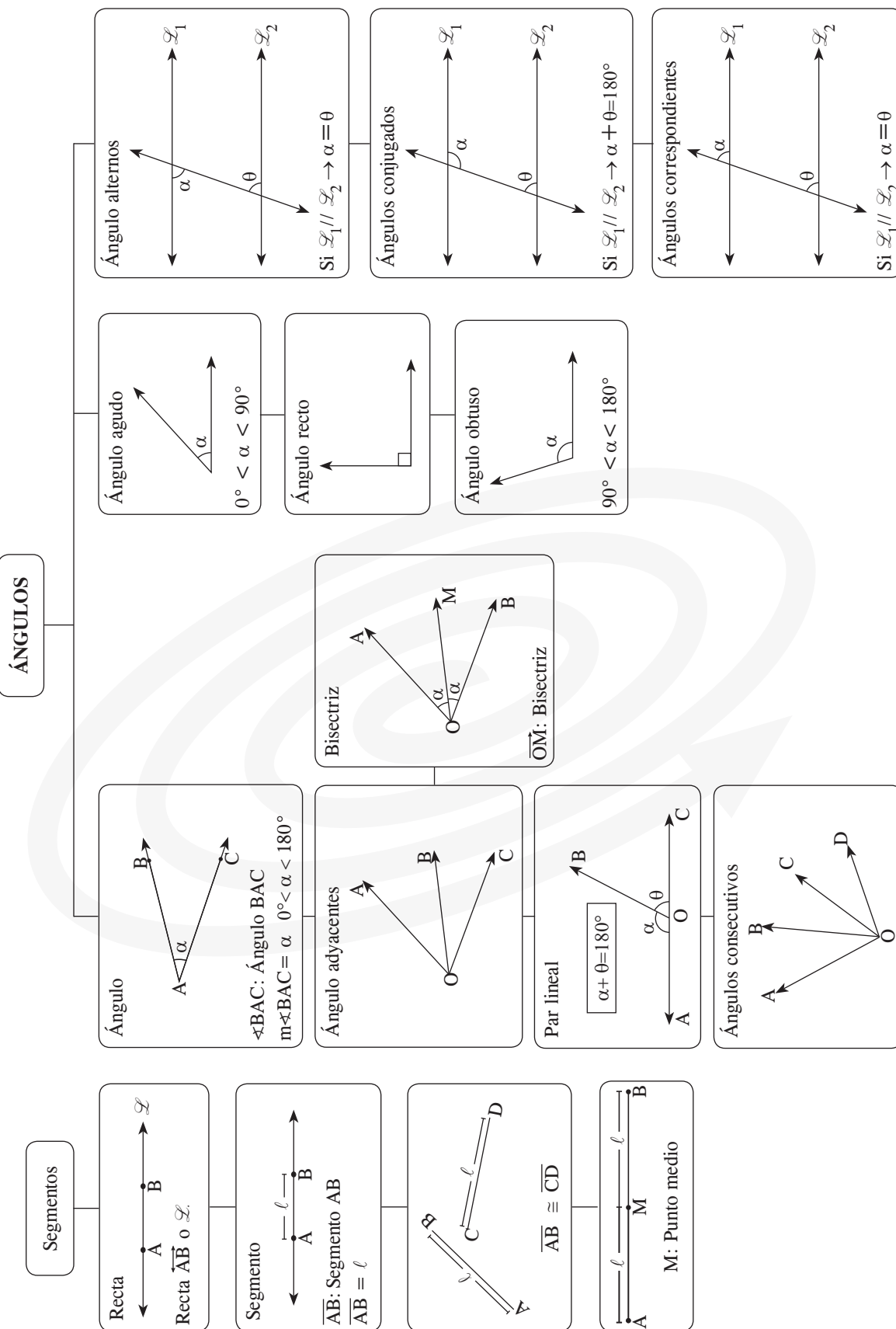
Teorema

La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.



Anotación

El conjunto formado por un punto y el conjunto vacío son conjuntos convexos.



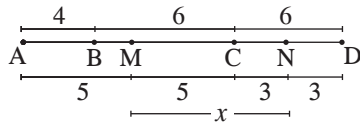


Problemas resueltos

1. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $AB = 4$ y $BC = CD = 6$. Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, halle MN.

- A) 6 B) 2 C) 3
D) 7 E) 8

Resolución



Piden: $\overline{MN} = x$

M: punto medio de $\overline{AC}$

$AM = MC = 5$

N: punto medio de $\overline{CD}$

$CN = ND = 3$

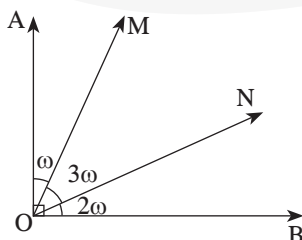
Se observa que: $x = 5 + 3$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: 8

2. En el interior de un ángulo recto AOB, se trazan los rayos $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$, tal que $m\angle AOM = \frac{m\angle MON}{3} = \frac{m\angle BON}{2}$. Halle la medida del ángulo AOM.
- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 16°

Resolución



Piden: $m\angle AOM = \omega$

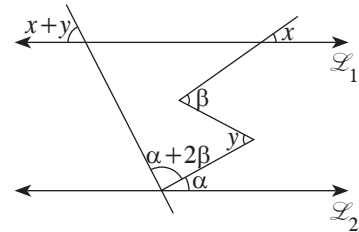
Del gráfico se observa que

$$\omega + 3\omega + 2\omega = 90^\circ$$

$$\therefore \omega = 15^\circ$$

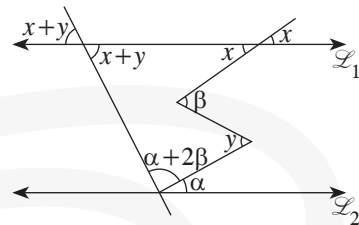
Rpta.: 15°

3. En el gráfico mostrado, $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2$. Calcule $x+y$.



- A) 90° B) 75° C) 60°
D) 50° E) 45°

Resolución



Piden: $x+y$

Por ángulos conjugados

$$(x+y) + 2(\alpha+\beta) = 180^\circ$$

Por propiedad:

$$x+y = \alpha+\beta$$

Reemplazando

$$(x+y) + 2(x+y) = 180^\circ$$

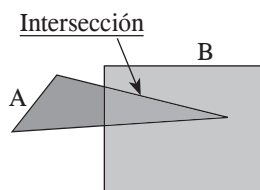
$$\therefore x+y = 60^\circ$$

Rpta.: 60°

4. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

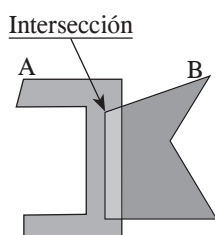
- La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo. ()
- La intersección de dos conjuntos no convexos es un conjunto no convexo. ()
- La intersección de un conjunto convexo y un conjunto no convexo, es un conjunto no convexo. ()

- A) VFV B) VVF C) VFF
D) VVV E) FFF

Resolución**Proposición I**

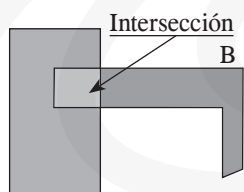
La intersección de dos o mas conjuntos convexos es otro conjunto convexo.

Verdadero

Proposición II

La intersección de dos conjuntos no convexos puede ser un conjunto convexo.

Falso

Proposición III

La intersección puede ser un conjunto no convexo.

Falso

Rpta.: VFF

5. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

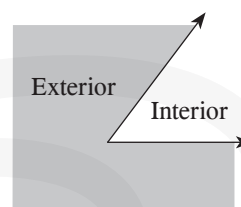
- Una semirrecta es un conjunto convexo. ()
- El exterior de un ángulo es un conjunto convexo. ()
- Todo ángulo sin el vértice es un conjunto no convexo. ()

A) VFV B) FVF C) FFF
D) VVV E) VFF

Resolución**Proposición I**

La semirrecta es un conjunto convexo.

Verdadero

Proposición II

El exterior de un ángulo es un conjunto no convexo.

Falso

Proposición III

Si a un ángulo se le omite uno de sus puntos, el conjunto resultante es un conjunto no convexo.

Falso

Rpta.: VFF



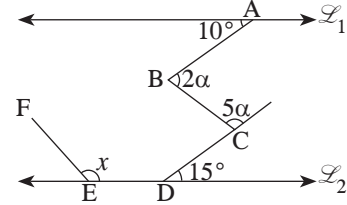
Helicopráctica

Nivel I

1. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, O, C y D tal que $AD = 2OC$ y $AO + CD = 14$. Halle la longitud de $\overline{AD}$.

Resolución

3. Halle el valor de x si $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$.



Resolución

2. Dados los ángulos adyacentes AOB y BOC ($m\angle AOB > m\angle BOC$), si $m\angle BOC = 40^\circ$, entonces la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y AOC es

Resolución

4. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- Un punto es un conjunto convexo. ()
- El interior de un ángulo es un conjunto convexo. ()
- La intersección de un conjunto convexo con otro no convexo es un conjunto convexo. ()

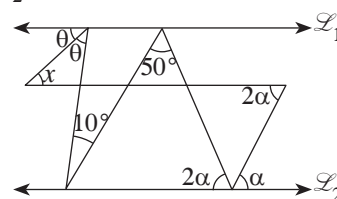
Resolución

Nivel II

5. En una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R, S y T, tal que R es punto medio de $\overline{PT}$, $PQ + RS = 12$ y $ST - QR = 4$. Calcule $2PQ - 3RS$.

Resolución

7. Si $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$, halle el valor de x .

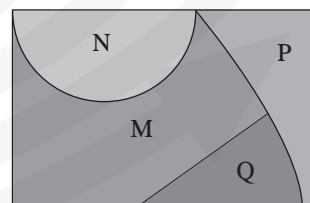


Resolución

6. Se tienen los ángulos adyacentes AOB y BOC, tal que $m\angle AOB - m\angle BOC = 60^\circ$; los rayos $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$ son las bisectrices de los ángulos AOB, BOC y XOY, respectivamente. Halle $m\angle BOZ$.

Resolución

8. En la figura, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero?



- A) $M \cup Q$ es un conjunto convexo.
 B) $N \cup Q$ es un conjunto convexo.
 C) $Q \cup P$ es un conjunto convexo.
 D) $M \cup N$ es un conjunto convexo.
 E) $M \cup P$ es un conjunto convexo.

Resolución

Nivel III

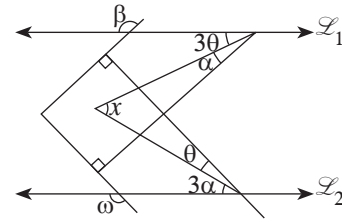
9. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, M, B y N, tal que $(AM)(BN) = (AN)(BM)$, además, $\frac{2}{AB} - \frac{2}{AM} = \frac{1}{10}$. Halle la longitud del segmento AN.

Resolución

10. Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que el ángulo BOC es recto y $m\angle AOB = 60^\circ$; la bisectriz del ángulo AOC es perpendicular al rayo $\overrightarrow{OD}$ y $m\angle BOD - m\angle AOB = 45^\circ$. Halle la medida del ángulo formado por dicha bisectriz y el rayo $\overrightarrow{OB}$.

Resolución

11. En el gráfico, si $\omega + \beta = 260^\circ$ y $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$. Halle el valor de x .



Resolución

12. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- El exterior de un ángulo, siempre es un conjunto convexo. ()
- El interior de un triángulo siempre es un conjunto convexo. ()
- El exterior de una recta contenido en un plano, es un conjunto no convexo. ()

Resolución



Helicotaller

Nivel I

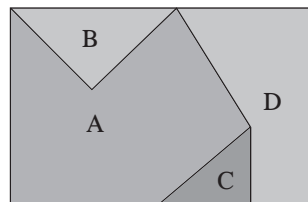
1. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Halle la distancia entre los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ si $AB = DC$ y $BD = 10$ m.

Resolución

2. Calcule el suplemento de un ángulo sabiendo que el complemento de la diferencia entre su suplemento y su complemento es igual al suplemento de la suma entre el suplemento y el complemento.

Resolución

3. En la figura, las regiones están marcadas con letras mayúsculas. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?



- A) $A \cup C$ es un conjunto convexo.
 B) $B \cup C$ es un conjunto convexo.
 C) $C \cup D$ es un conjunto convexo.
 D) $A \cup B$ es un conjunto convexo.
 E) $A \cup D$ es un conjunto convexo.

Resolución

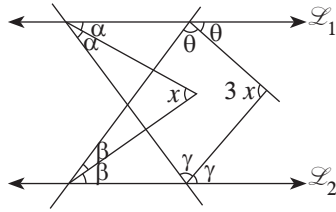
Nivel II

4. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que $(AB)(CD) = 2(BC)(AD)$. Calcule $\frac{1}{AD} + \frac{2}{AB}$ en función de AC.

- A) $2AC$ B) $\frac{1}{AC}$ C) $\frac{2}{AC}$
 D) $\frac{3}{AC}$ E) $3AC$

Resolución

5. Si $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$, halle el valor de x .



Resolución

Nivel III

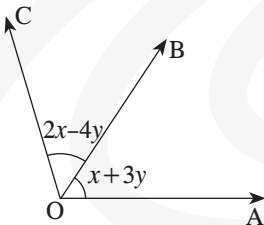
7. En una recta se ubican consecutivamente los puntos A, B, C, D y E, tal que

$$BD + AC + BE + AD + CE = (AE)(BD)$$

Calcule $\frac{1}{AE} + \frac{1}{BD}$.

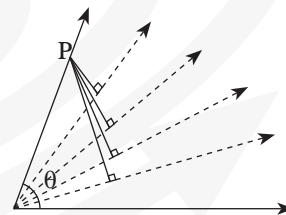
Resolución

6. En la figura, $m\angle AOC = 120^\circ$. Halle el menor valor entero de x . x , y son positivos



Resolución

8. Un ángulo agudo cuya medida es θ es dividido en m partes congruentes como se muestra en la figura, por un punto P de uno de sus lados se trazan n perpendiculares a los rayos que dividen al ángulo cuya medida es θ . Determine la medida del ángulo que forman la primera y la enésima perpendicular.



- A) $\frac{\theta(n-1)}{m}$ B) $\frac{\theta(m-1)}{n}$
 C) $\frac{\theta(m-1)}{m}$ D) $\frac{\theta(n-1)}{mn}$
 E) $\frac{mn(n-1)}{\theta}$

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Se tienen los puntos consecutivos O, A, B y M dispuestos de manera que $OA = 4\text{ u}$ y $OB = 20\text{ u}$. Halle OM si $3AB = 2(MA + MB)$.

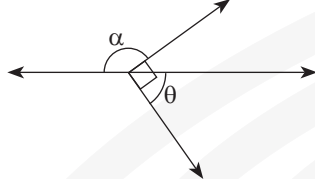
A) 20 B) 22 C) 24
D) 25 E) 28

2. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ de los ángulos AOB y COD, respectivamente. Si $m\angle MON = 80^\circ$ y $m\angle AOC - m\angle BOD = 20^\circ$, halle la medida del ángulo AOC.

A) 90° B) 100° C) 60°
D) 40° E) 50°

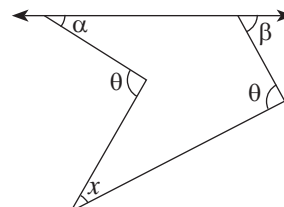
Nivel II

3. En la figura, $\alpha + \theta = 150^\circ$, halle el valor de α .



A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 120°

4. Del gráfico mostrado, halle el valor de x si $\beta - \alpha = 32^\circ$.



A) 16° B) 32° C) 30°
D) 24° E) 36°

Nivel III

5. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tales que $(AD)(CD) - (AB)(BC) = 49\text{ u}^2$, además $\frac{(AB)(CD)}{(AD)(BC)} = 1\text{ u}$. Halle BD.

A) 6 u B) 7 u C) 8 u
D) 9 u E) 10 u



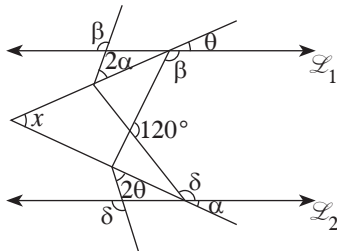
Test 2

Nivel I

1. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D y E. Si $AB + CE = 18$, $BE - CD = 10$ y $AE - DE = 12$, halle AE.

A) 10 u B) 20 u C) 30 u
D) 25 u E) 28 u

2. En la figura mostrada, $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$. Halle el valor de x .



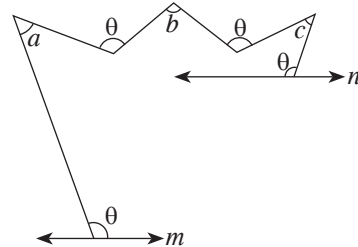
A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

Nivel II

3. A la medida de un cierto ángulo se le resta las $\frac{3}{5}$ partes del total menos 4° , luego la cuarta parte del resto más 3° y en seguida los $\frac{2}{5}$ del nuevo resto más 12° . Si aun le quedan 24° , ¿cuál es la medida del ángulo?

A) 180° B) 185° C) 190°
D) 195° E) 200°

4. De la figura mostrada, $\vec{m} \parallel \vec{n}$. Calcule $a + b + c$.



A) 120° B) 90° C) 180°
D) 105° E) 135°

Nivel III

5. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- Un segmento menos uno de los extremos, es un conjunto convexo. ()
- Una región triangular, menos una altura, es siempre un conjunto no convexo. ()
- Algún ángulo es un conjunto convexo. ()

A) VVV B) FFF C) VFV
D) VFF E) VVF



Helicodesafío

1. Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $\frac{BD}{m} = \frac{CD}{n}$. Determine AD.

- A) $\frac{mAC - nAB}{m - n}$ B) $\frac{mAB - nAC}{m - n}$
 C) $\frac{mAC}{nAB}$ D) $\frac{nAB}{mAC}$
 E) $\frac{mAC - nAB}{m + n}$

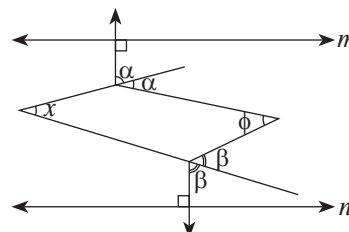
2. Sea un ángulo cuya medida es θ y dividido en n ángulos congruentes por m rayos. Determine la medida del ángulo que forman las bisectrices del ángulo $(n-1)$ y del primero.

- A) $\frac{\theta(n-1)}{m}$ B) $\frac{\theta(m-1)}{n}$ C) $\frac{\theta(m-3)}{n}$
 D) $\frac{m\theta}{n}$ E) $\frac{\theta}{m+n}$

3. En un plano se traza una recta AA' y $O \in \overleftrightarrow{AA'}$, por el punto O en un mismo semiplano se trazan los rayos OB, OX y OX' con la condición que el rayo OX es exterior al ángulo AOB y el rayo OX' es exterior al ángulo A'OB. Si $m\angle XOA = 150^\circ$, $m\angle XOB = 100^\circ$ y $m\angle X'OB = \theta$ y la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos X'OB y XOA' es 110° , halle la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOX' y BOQ, siendo el rayo OQ la bisectriz del ángulo XOA'.

- A) $72^\circ 20'$ B) $71^\circ 20'$ C) $68^\circ 20'$
 D) $67^\circ 20'$ E) $73^\circ 20'$

4. En la figura mostrada, si $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$. Determine el valor de x .



- A) $90^\circ - \phi$ B) $45^\circ - \frac{\phi}{2}$ C) $90^\circ - \frac{\phi}{2}$
 D) $60^\circ - \frac{\phi}{2}$ E) $90^\circ + \frac{\phi}{2}$

5. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- La intersección de dos conjuntos convexos, puede ser un conjunto no convexo. ()
- La unión de dos conjuntos convexos, puede ser un conjunto no convexo. ()
- La unión de dos conjuntos no convexos, puede ser un conjunto convexo. ()

- A) VVV B) FVF C) FFF
 D) FFV E) FVV



Objetivos

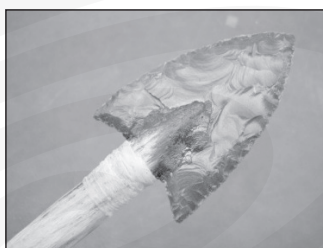
- Define correctamente al triángulo, su clasificación y las líneas notables.
- Utiliza adecuadamente, los teoremas de los triángulos según sus características.



Sabías que...

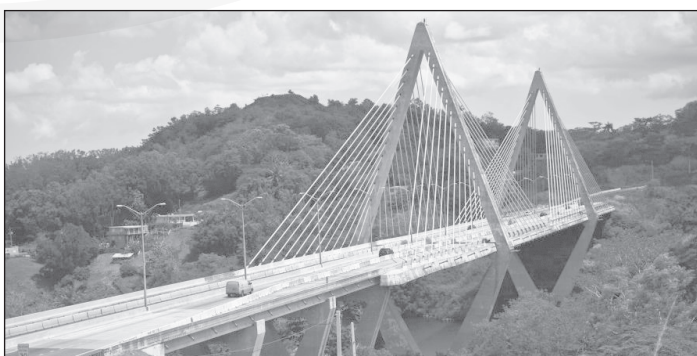
Triángulo

Desde la antigüedad, el hombre utilizó diversas formas triangulares para la supervivencia como herramientas de caza, construcciones, etc.



El triángulo es muy utilizado en la vida diaria, basta observar a nuestro alrededor para identificar las formas triangulares. Las formas triangulares están presentes en diferentes aplicaciones: edificaciones, instrumentos musicales, objetos domésticos, objetos de escritorio, señales de tránsito, etc.

El triángulo es muy utilizado en las estructuras porque es la única figura que no se puede deformar.



Los triángulos tienen una gran importancia en la geometría, pues todo polígono puede ser descompuesto o formado por triángulos. Esta gran importancia de los triángulos en la geometría, ya la conocían los geómetras desde los tiempos de las primeras civilizaciones.

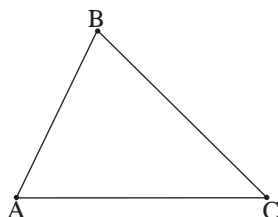




TRIÁNGULO

Definición

Dados los puntos A, B y C, no colineales, entonces se denomina triángulo a la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y se denota como $\triangle ABC$.



Notación

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} \wedge B \notin \overline{AC}$$

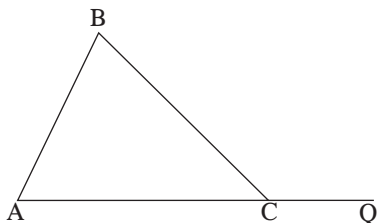
Elementos

- Vértices: A, B y C
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

Ángulos en un triángulo

Todo triángulo determina tres ángulos. Así el triángulo ABC determina los ángulos ABC, BCA y BAC, los cuales se denominan ángulos o ángulos internos del triángulo ABC.

Un ángulo externo de un triángulo es el ángulo adyacente y suplementario de un ángulo del triángulo, es decir es cada uno de los ángulos que determina un par lineal con un ángulo interno del triángulo.

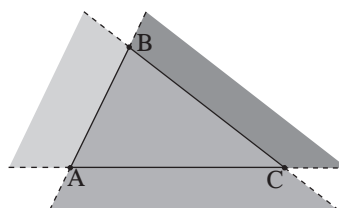


En la figura

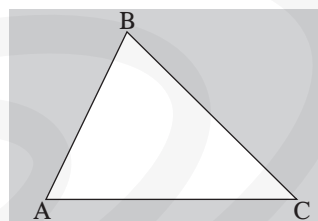
Si $Q \in \overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo BCQ es externo.

Interior y exterior de un triángulo

El interior de un triángulo es la intersección de los interiores de los ángulos del triángulo. El exterior de un triángulo es el conjunto de todos los puntos que no están en el triángulo ni en el interior.

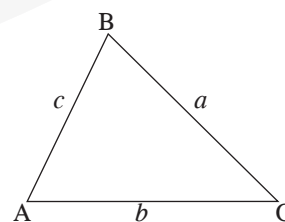


Exterior al triángulo



Perímetro del triángulo

Es la suma de las longitudes de los lados del triángulo y se denota por $2p$.



En el $\triangle ABC$: $2p = a + b + c$

El semiperímetro se denota como p y es igual a

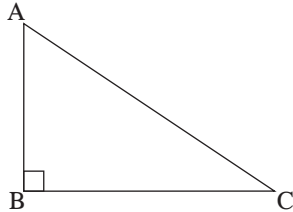
$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

I. Según la medida de sus ángulos

Triángulo rectángulo

Tiene un ángulo interno que mide 90° .



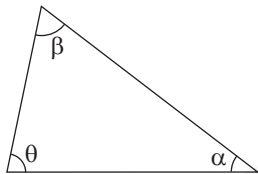
En la figura

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: catetos

$\overline{AC}$: hipotenusa

Triángulo acutángulo

Los ángulos internos son agudos



En la figura

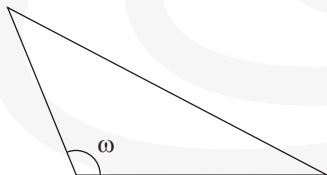
$$0 < \beta < 90^\circ$$

$$0 < \alpha < 90^\circ$$

$$0 < \theta < 90^\circ$$

Triángulo obtusángulo

Un ángulo interno es obtuso

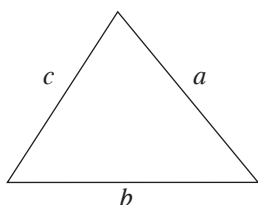


$$90^\circ < \omega < 180^\circ$$

II. Según la longitud de sus lados

Triángulo escaleno

Los tres lados no son congruentes



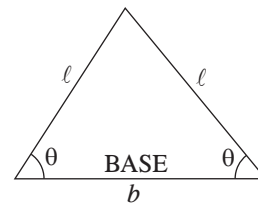
$$a \neq b$$

$$b \neq c$$

$$a \neq c$$

Triángulo isósceles

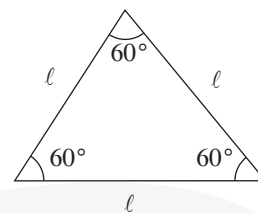
Tiene solo dos lados congruentes. En el triángulo isósceles se denomina base al lado diferente.



$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

Triángulo equilátero

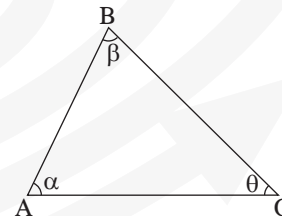
Tiene los lados congruentes.



TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

Teorema

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° .



En la figura

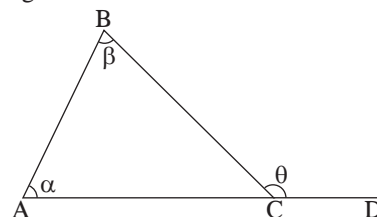
Si $m\angle BAC = \alpha$, $m\angle ABC = \beta$ y $m\angle ACB = \theta$

Entonces

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

Teorema

La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes al ángulo externo.



En la figura

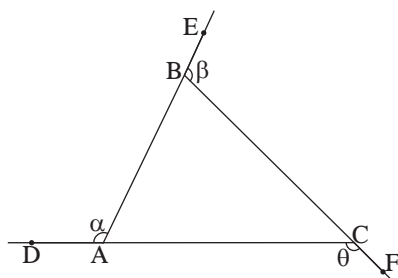
Si $m\angle BAC = \alpha$, $m\angle ABC = \beta$ y $m\angle BCD = \theta$

Entonces

$$\theta = \alpha + \beta$$

Teorema

En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos externos considerados uno por vértice es 360° .



En la figura

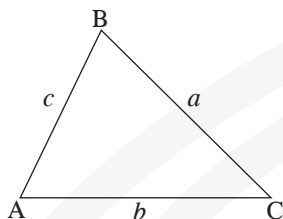
Si $m\angle BAD = \alpha$, $m\angle EBC = \beta$ y $m\angle ACF = \theta$

Entonces

$$\alpha + \beta + \theta = 360^\circ$$

Teorema

En todo triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.



En el $\triangle ABC$ de la figura

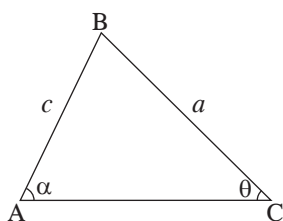
Si $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$

Entonces

$$b - c < a < b + c$$

Teorema

En todo triángulo, al lado de mayor longitud se opone el ángulo interno de mayor medida y viceversa.



En la figura

Si $AB = c$, $BC = a$, tal que $a > c$,

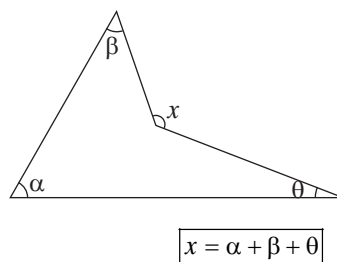
$m\angle BAC = \alpha$ y $m\angle ACB = \theta$

Entonces

$$\alpha > \theta$$

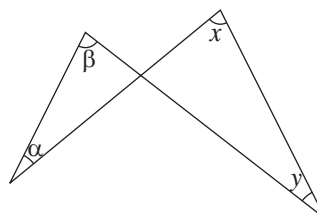
Teoremas adicionales

I.



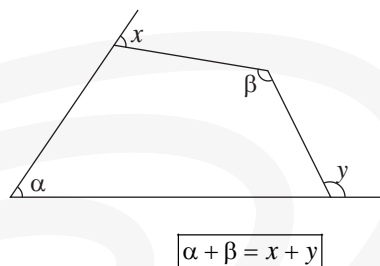
$$x = \alpha + \beta + \theta$$

II.



$$\alpha + \beta = x + y$$

III.

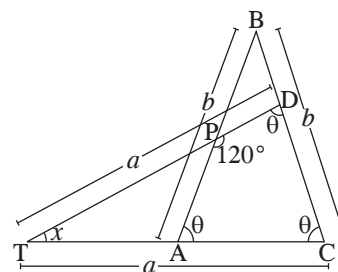


$$\alpha + \beta = x + y$$

Ejemplo

➤ En un triángulo isósceles ABC , de base $\overline{AC}$, se ubican los puntos D y T en $\overline{BC}$ y en la prolongación de $\overline{CA}$ respectivamente, tal que $\overline{AB}$ y $\overline{DT}$ se intersecan en P y $TD = TC$ y $m\angle APD = 120^\circ$, halle $m\angle DTC$.

- A) 10° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 40°

Resolución

Piden: x

$$m\angle TDC = m\angle TCD = m\angle BAC = \theta$$

$$3\theta + 120^\circ = 360^\circ$$

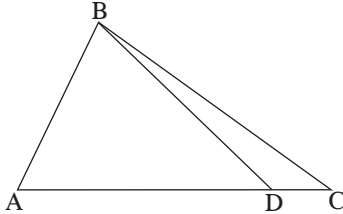
$$\theta = 80^\circ$$

$$\therefore x = 20^\circ$$

LÍNEAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

Ceviana

Se denomina ceviana en un triángulo, al segmento cuyos extremos son un vértice y un punto cualquiera de lado opuesto a dicho vértice.

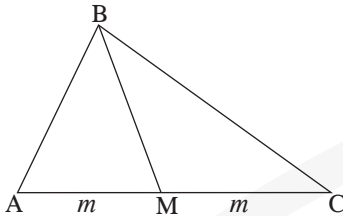


En el $\triangle ABC$:

$\overline{BD}$: ceviana relativa al lado $\overline{AC}$

Mediana

Es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

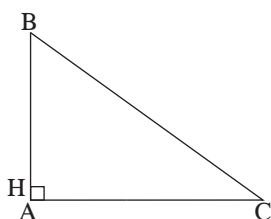
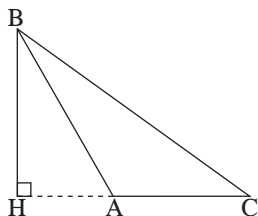
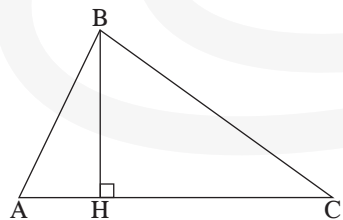


En el $\triangle ABC$:

$\overline{BM}$: mediana relativa al lado $\overline{AC}$

Altura

Es el segmento perpendicular a la recta que contiene a uno de los lados y que tiene por extremos un punto de esta recta y el vértice opuesto a dicho lado.

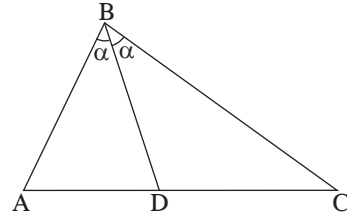


En los triángulos ABC:

$\overline{BH}$: altura relativa al lado $\overline{AC}$

Bisectriz interior

Es el segmento de una bisectriz de un ángulo de un triángulo, cuyos extremos son el vértice del ángulo y un punto del lado opuesto.

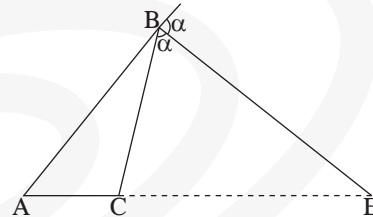


el $\triangle ABC$:

$\overline{BD}$: bisectriz interior relativa al lado $\overline{AC}$

Bisectriz exterior

Es el segmento de una bisectriz de un ángulo externo de un triángulo cuyos extremos son el vértice del ángulo y un punto de la recta que contiene al lado opuesto, solo si no es equilátero y no es isósceles.

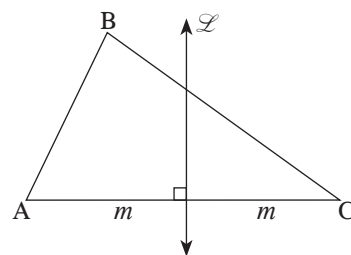


el $\triangle ABC$:

$\overline{BE}$: bisectriz exterior relativa al lado $\overline{AC}$

Mediatriz

Es la recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio y coplanar con el triángulo.



En la figura

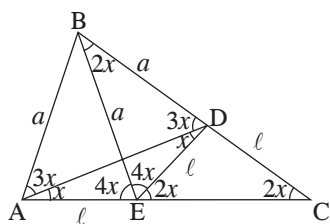
$\mathcal{L}$: mediatriz del lado $\overline{AC}$

Ejemplo

➤ En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{BE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{ED} \cong \overline{DC}$. Si $m\angle BAD = 3(m\angle DAC)$, halle $m\angle DAC$.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 24°

Piden: x



$\triangle AED$: isósceles

ΔEDC : isósceles

$$m\angle ADB = 3x$$

$\triangle ABD$: isósceles

$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{BE}$$

$$m\angle BED = m\angle BDE = 4x$$

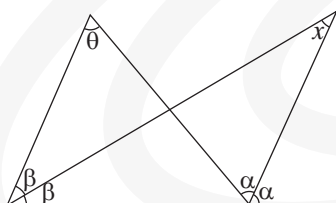
En el punto E

$$10x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 18^\circ$$

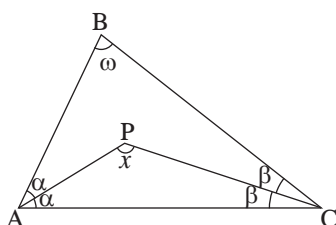
Teoremas

I.



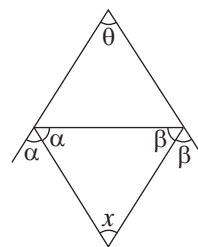
$$x = \frac{\theta}{2}$$

II.



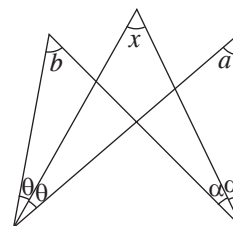
$$x = 90^\circ + \frac{\omega}{2}$$

III.



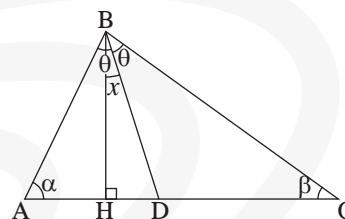
$$x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

IV.



$$x = \frac{a+b}{2}$$

V.



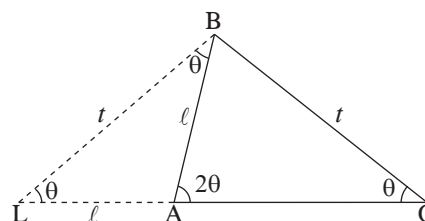
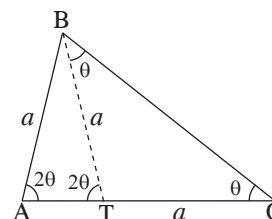
$\overline{\text{BD}}$: bisectriz del $\sphericalangle\text{ABC}$

Si $\alpha > \beta$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

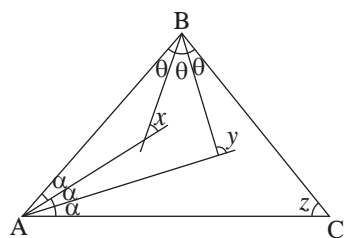
Observación

Cuando en un triángulo tenemos un ángulo interno cuya medida es el doble de otro ángulo interno se puede realizar lo siguiente.

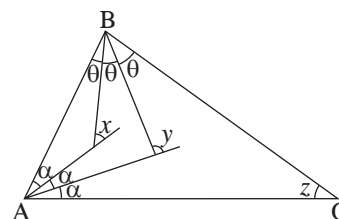


Ejemplo

- En la figura, calcule $x+y+z$.



- A) 100° B) 120° C) 150°
 D) 180° E) 360°

Resolución

Piden: $x+y+z$

Por ángulo externo

$$x = \alpha + \theta$$

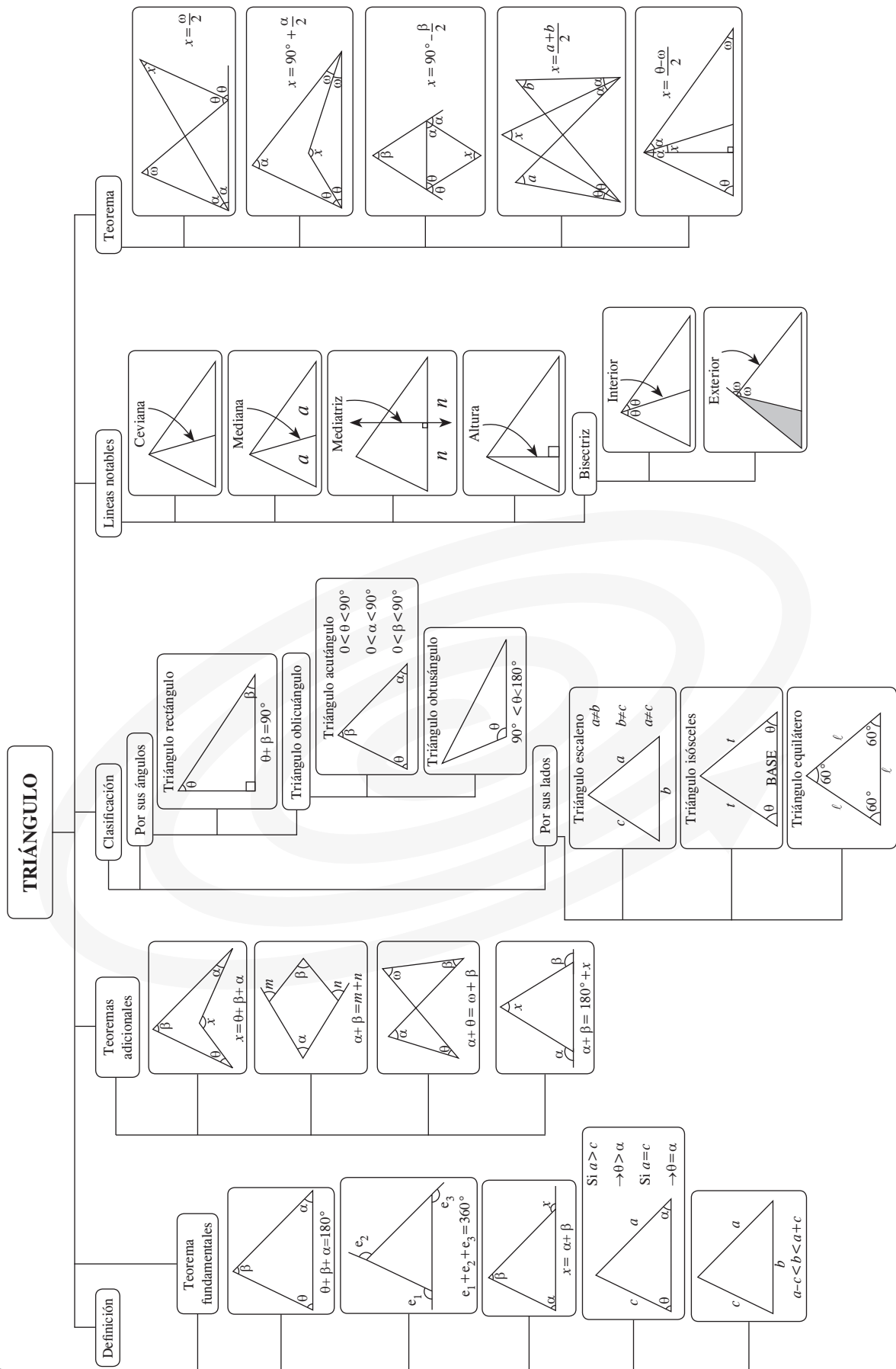
$$y = 2\alpha + 2\theta \quad \downarrow +$$

$$x+y = 3\alpha + 3\theta$$

$\triangle ABC$:

$$\underbrace{3\alpha + 3\theta} + z = 180^\circ$$

$$\therefore x+y+z = 180^\circ$$



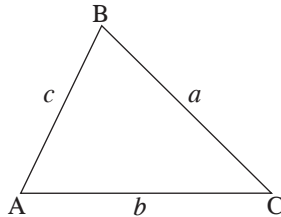


Problemas resueltos

1. (UNI 2016-I) Determine el número de triángulos escalenos, de perímetro menor de 10 u y cuyos lados tengan medidas enteras.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución



Datos: a, b, c son valores enteros, además $a \neq b$; $b \neq c$; $a \neq c$. También $a+b+c < 10$

Se sabe que

$$b < a+c$$

Ahora, sumamos b a cada miembro.

$$2b < a+c+b$$

$$2b < 10$$

$$b < 5$$

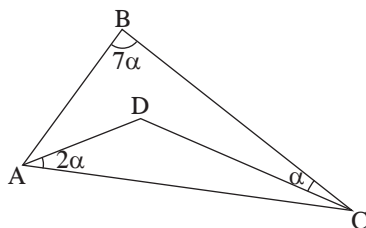
Análogamente

$$a < 5$$

$$c < 5$$

De lo anterior, el único triángulo que cumple es cuando $a=4$; $b=3$ y $c=2$.

2. (UNI 2015-I) En el gráfico, $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DC}$, calcule α (en grados).

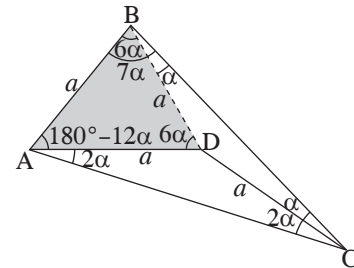


- A) 8° B) 9° C) 10°
D) 12° E) 13°

Resolución

Nos piden α .

Dato: $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DC}$



Sea $AB = AD = DC = a$

En el $\triangle ABC$, $m\angle BAD = 180^\circ - 12\alpha$

Luego, como el triángulo ABD es isósceles.
 $m\angle ABD = m\angle ADB = 6\alpha$

Luego, $m\angle DBC = \alpha$

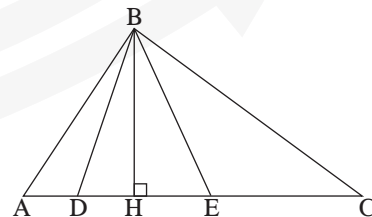
Además, $BD = DC = a$

$\triangle ABD$: Equilátero

$$6\alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ$$

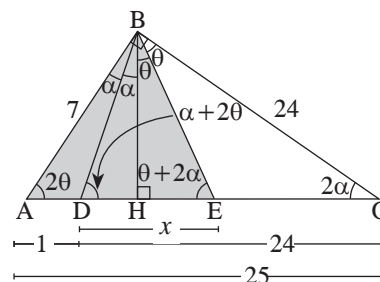
3. (UNI 2013-II) En la figura, el triángulo ABC, recto en B, $\overline{BH}$ es la altura, $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABH y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo HBC. Si $\overline{AB} = 7$ u y $\overline{BC} = 24$ u. Halle DE, en u.



- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

Resolución

Nos piden $DE = x$



Datos: $AB = 7$, $BC = 24 \rightarrow AC = 25$

Como $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ son bisectrices, entonces los $\triangle ABE$ y $\triangle BCD$ son isósceles.

$$\begin{cases} BC = CD = 24 \rightarrow AD = 1 \\ AB = AE = 7 \end{cases}$$

Luego

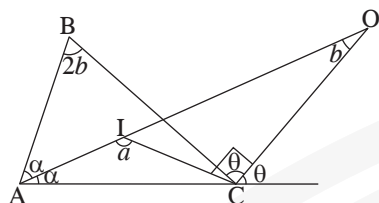
$$x + 1 = 7$$

$$\therefore x = 6$$

4. (UNI 2010-I) En un triángulo ABC, denote por I al incentro y por O a la intersección de la bisectriz interior del ángulo A con la bisectriz exterior del ángulo C. Si $m\angle AIC + m\angle COA = 150^\circ$, halle $m\angle COA$.

- A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

Resolución



Datos

$$\underbrace{m\angle AIC}_a + \underbrace{m\angle COA}_b = 150^\circ \quad \dots(I)$$

En el $\triangle IOC$

$$b + 90^\circ = a \quad \dots(II)$$

de I y II

$$2b = 60^\circ$$

$$\therefore b = 30^\circ$$

$$\rightarrow m\angle COA = b = 30^\circ$$

5. (UNI 2010-I) En un cuadrilátero ABCD, las prolongaciones de los lados $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en M ($A \in \overline{BM}$) y las prolongaciones de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersectan en N ($C \in \overline{BN}$). Si los ángulos BAD y BCD miden 70° y 80° , respectivamente. Determine el ángulo que forman las bisectrices interiores de los ángulos AMC y ANC.

- A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 115°

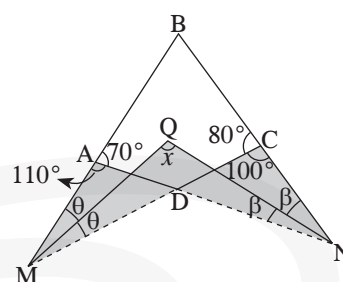
Resolución

Piden: x

Datos: $m\angle BAD = 70^\circ$

$m\angle BCD = 80^\circ$

$\overline{QM}$ y $\overline{NQ}$: líneas bisectrices



Indicando las medidas de los ángulos en A y C, aplicamos el teorema

$$x = \frac{110^\circ + 100^\circ}{2}$$

$$\therefore x = 105^\circ$$



Helicopráctica

Nivel I

1. En un triángulo ABC, M es punto exterior relativo al lado $\overline{AC}$, si $BC + AM - AC = 9$ u, entonces el menor valor entero de la longitud (en u) de $\overline{BM}$ es

Resolución

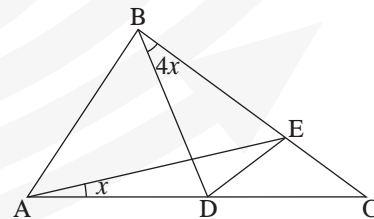
3. En un triángulo ABC, en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente. Si $PC = 7$ u, $QC = 5$ u y $m\angle ABC = m\angle QPA$. ¿Cuántos valores enteros toma la longitud de $\overline{PQ}$, en u?

Resolución

2. En la prolongación del lado $\overline{AC}$ y en el exterior relativo a $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos D y E, respectivamente, tal que $\overline{BE} \cong \overline{EC}$. Si $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ y $m\angle BCD + m\angle BEC = 220^\circ$, entonces la medida del ángulo ABE es

Resolución

4. En la figura, si $\overline{AB} \cong \overline{AD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EC}$, halle el valor de x .



Resolución

Nivel II

5. En un triángulo ABC, sus lados miden: $AB = 2x - 1$, $BC = 6 - x$, $AC = 3x - 1$. Si x es un número entero positivo, entonces el triángulo es

Resolución

7. En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, la bisectriz del ángulo BAC y la bisectriz exterior $\overline{CD}$ se intersectan en el punto E. Si $AB = 10$ m, entonces la mayor longitud entera, en m, de CE es

Resolución

6. En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la ceviana $\overline{AP}$ y se ubica Q en $\overline{AP}$ tal que $\overline{BQ} \cong \overline{BP}$ y $m\angle ABQ < 30^\circ$, se traza la altura $\overline{PH}$ del triángulo APC. Halle el menor valor entero de la medida del ángulo APH.

Resolución

8. En un triángulo escaleno ABC, el ángulo BAC es agudo, se trazan las bisectrices exteriores $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$ que se intersectan en el punto E. Halle el mayor valor entero de la medida del ángulo BEC.

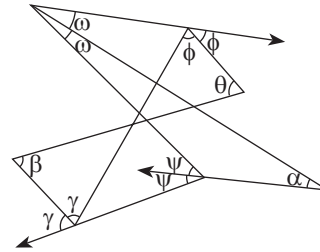
Resolución

Nivel III

9. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersecan en P y Q a $\overline{AC}$, (P-H-Q). Si $PQ = 8$ u, entonces el menor valor entero, en u, del perímetro del triángulo PBQ es

Resolución

11. Del gráfico mostrado, ¿qué relación hay entre α , β y θ ?



Resolución

10. En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ y la bisectriz interior $\overline{FG}$ del triángulo AFC. Si $AF - GC = 7$ m, entonces la longitud, en m, de FC es

Resolución

12. En un triángulo ABC, las bisectrices $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ se intersecan en el punto I, desde el cual se traza hacia el lado $\overline{AC}$ la perpendicular $\overline{IH}$ ($H \in \overline{AC}$) de manera que $m\angle AIC - m\angle HID = 108^\circ$. Halle la medida del ángulo BAC.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. En un triángulo ABC , D es un punto de $\overline{AC}$, $m\angle DBC = 60^\circ$, $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$ y $AD + AB = BC$. Entonces la medida del ángulo BCA es

Resolución

3. En un triángulo equilátero ABC ; M , N y Q pertenecen a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si $\overline{MN} \cong \overline{NQ}$ y $m\angle AQM = \theta$, entonces $m\angle AQM + m\angle BMN + m\angle QNC$ es

Resolución

Nivel II

2. En un triángulo ABC , recto en B , se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ ($D \in \overline{AE}$). Si $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$, entonces la medida del ángulo DBE es

Resolución

4. En un triángulo ABC , en el interior y en el exterior relativo al lado $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q , respectivamente, tal que

$$\angle BAP \cong \angle ACQ \text{ y } \angle BCP \cong \angle CAQ$$

Si $m\angle APC + m\angle AQC = 4(m\angle ABC)$, entonces la medida del ángulo ABC es

Resolución

5. En un triángulo ABC, si $BC > AB$ y $m\angle BAC = 21^\circ$. Entonces el menor valor entero de la medida del ángulo de vértice B.

Resolución

Nivel III

7. Se ubican los puntos P y Q en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, respectivamente, entonces:

- A) $PQ + AC = AQ + PC$
- B) $PQ + AC < AQ + PC$
- C) $2(PQ) + AC > PC + AQ$
- D) $PQ + AC > PC + AQ$
- E) $PQ + AQ > 2(PC) + AC$

Resolución

6. En un triángulo traza la ceviana interior $\overline{BD}$, si $m\angle BDC = 40^\circ$, $m\angle BCA = 20^\circ$ y $\overline{AC} = BD + BC$. Halle la $m\angle ABD$.

Resolución

8. En un triángulo isósceles, el perímetro de su región es mayor que tres veces la longitud de la base, entonces el menor valor entero de uno de los ángulos internos congruentes es

Resolución



Test 1

Nivel I

1. En un triángulo ABC, obtuso en B, $m\angle BAC = 2(m\angle ACB)$, $AB = 4$ u y $BC = x$. Si $x \in \mathbb{N}$, entonces x es

A) 5 u. B) 6 u. C) 7 u.
D) 8 u. E) 9 u.

2. En un triángulo ABC, P es un punto de $\overline{AB}$, Q de $\overline{BC}$ y D un punto de la prolongación de $\overline{QP}$. Si los ángulos DAC y ABC son suplementarios, $m\angle ADB = m\angle ACB$ y $AP = 6$ m, entonces el menor valor entero de DP, en m, es

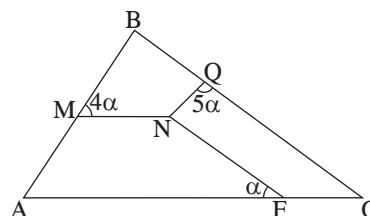
A) 6. B) 7. C) 8.
D) 9. E) 10.

Nivel II

3. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BE}$, si $m\angle BAC = 3(m\angle EBC)$; $AE = BC$ y $m\angle C = 2(m\angle EBC)$, entonces $m\angle EBC$ es

A) 15° . B) 18° . C) 21° .
D) $22,5^\circ$. E) 30° .

4. La figura muestra un triángulo ABC, donde $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\overline{NQ} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{NF} \parallel \overline{BC}$. ¿Cuál es el valor de α ?



A) 12° B) 16° C) 18°
D) 20° E) 24°

Nivel III

5. Dos lados de un triángulo oblicuángulo escaleno miden 3 u y 5 u. Indique la suma de los valores enteros que admite el tercer lado.

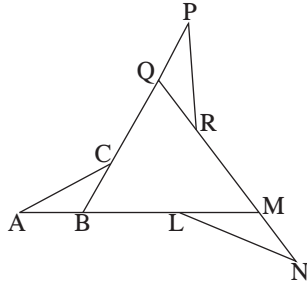
A) 25 u B) 22 u C) 18 u
D) 15 u E) 17 u



Test 2

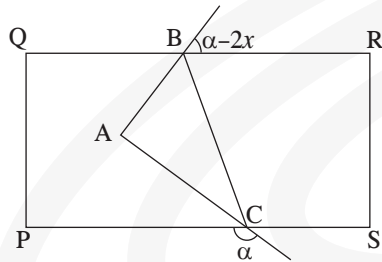
Nivel I

1. En el gráfico; $\overline{AC}$, $\overline{LN}$ y $\overline{PR}$ son las bases de los triángulos isósceles ABC , LMN y PQR . Calcule $m\angle A + m\angle P + m\angle N$.



- A) 45° B) 60° C) 70°
D) 90° E) 135°

2. En el gráfico, PQRS es un rectángulo y el ángulo exterior en A del triángulo ABC mide 88° . Halle el valor de x .



- A) 42° B) 43° C) 44°
D) 46° E) 48°

Nivel II

3. En un triángulo ABC , en $\overline{AC}$ se ubica el punto H de modo que $m\angle BHC = 90^\circ$, $m\angle A = 2(m\angle CBH)$, $HA = a$ y $HC = b$. Calcule $\overline{AB}$.

- A) $2a - b$ B) $2b - a$ C) $a - b$
D) $a + b$ E) $2a + b$

4. En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC , se ubican los puntos M y N de modo que $\overline{AB} \cong \overline{AN}$, $\overline{MC} \cong \overline{CN}$, $m\angle BAN = 80^\circ$ y $m\angle MCN = 20^\circ$. Halle la $m\angle BNM$.

- A) 45° B) 50° C) 55°
D) 60° E) 65°

Nivel III

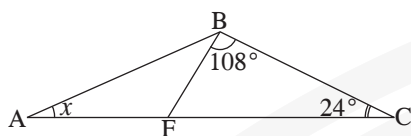
5. Dado el triángulo ABC , se ubica el punto interior O de modo que $m\angle OAC = 4(m\angle BAO)$ y $m\angle OCA = 4(m\angle OCB)$. Halle la $m\angle AOC$, sabiendo que el $\angle ABC$ mide 80° .

- A) 96° B) 100° C) 116°
D) 120° E) 126°

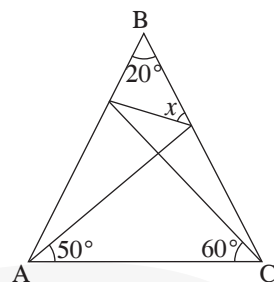


Helicodesafío

- En un triángulo ABC, $m\angle BAC = 4(m\angle ACB)$ y $AB = 4$ u, halle el mayor valor entero de BC.
A) 14 u B) 15 u C) 16 u
D) 17 u E) 18 u
- En un triángulo uno de sus lados mide 1 cm y el mayor ángulo externo mide θ . Calcule el valor del menor ángulo externo, si los lados del triángulo tienen valores enteros.
A) $180^\circ - \theta$ B) $180^\circ - \frac{\theta}{2}$ C) 2θ
D) $\frac{3\theta}{2}$ E) $45^\circ + \frac{\theta}{2}$
- Según el gráfico $AF = BF + BC$. Calcule x .
- Indique el número de triángulos escalenos cuyos lados son enteros, y el perímetro de la región triangular es menor que 13.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5
- Si $AB = BC$, calcule x .



- A) 12° B) 18° C) 10°
D) 15° E) 6°



- A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 28°

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS



Objetivos

- Conoce los conceptos teóricos para el análisis y la búsqueda de los triángulos congruentes en la resolución de los ejercicios.
- Establece las relaciones entre lados, ángulos y otros elementos como consecuencia de identificar dos o más figuras geométricas que son congruentes.



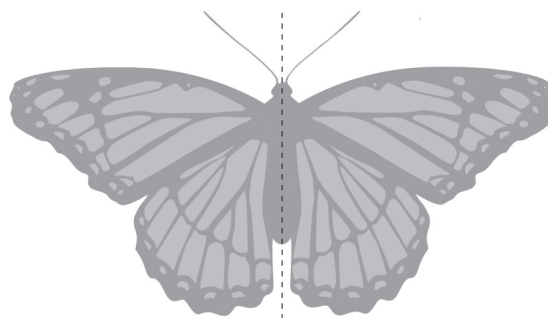
Sabías que...

Congruencia de triángulos

Al fabricar artículos domésticos en cadena, como por ejemplo, cocinas a gas, si se requiere que pertenezcan a la misma marca y a un mismo modelo, cada pieza, por insignificante que parezca, debe ser de igual forma y tamaño para poderla utilizar en el montaje de cualquiera de ellos. Los repuestos también deben ser idénticos para cambiarlos en el momento de hallarse algún defecto de fabricación o para su posterior reparación dependiendo del uso y su desgaste.



En la naturaleza, la mayoría de los seres vivos tienen una estructura física que va acorde a la simetría axial, aunque solo como una buena aproximación, de esta manera si observamos a una mariposa, se podrá apreciar lo parecido que son sus partes derecha e izquierda, tienen una aproximación a la congruencia.





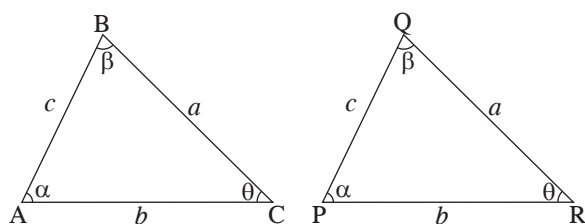
Helicoteoría

En general dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición.

Definición

Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes, de tal modo que a lados congruentes le corresponden ángulos congruentes y viceversa.



En la figura, los triángulos ABC y PQR son congruentes y se denota por $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ y se lee el triángulo ABC es congruente con el triángulo PQR.

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{PQ} & \angle A \cong \angle P \\ \overline{BC} \cong \overline{QR} & \angle B \cong \angle Q \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} & \angle C \cong \angle R \end{cases}$$

Esta notación no solo expresa la congruencia de los triángulos sino también cuál es la congruencia, es decir, el orden de los vértices establece una correspondencia entre ellos:

Lados correspondientes son los que se oponen a ángulos congruentes y viceversa.

A es correspondiente a P, B es correspondiente a Q y C es correspondiente a R.

De ahí que es posible establecer una correspondencia entre sus lados.

- $\overline{AB}$ es correspondiente a $\overline{PQ}$.
- $\overline{BC}$ es correspondiente a $\overline{QR}$.
- $\overline{AC}$ es correspondiente a $\overline{PR}$.

Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, entonces $\triangle ACB \cong \triangle PRQ$.

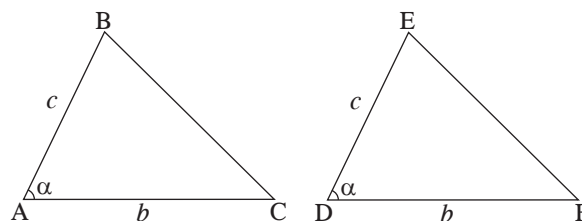
La congruencia de triángulos es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

POSTULADO Y TEOREMAS DE LA CONGRUENCIA

Para determinar la congruencia de dos triángulos es necesario establecer la congruencia de tres elementos los cuales deben estar en un orden determinado y por lo menos uno de ellos tiene que ser un lado.

Postulado lado – ángulo – lado (LAL)

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes dos lados y el ángulo determinado por dichos lados, entonces los triángulos son congruentes.



En la figura

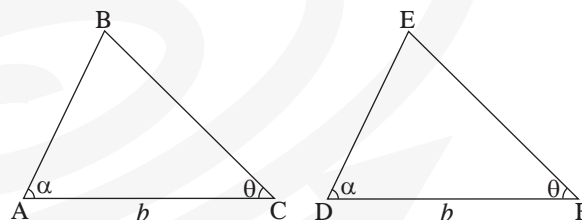
Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle BAC \cong \angle EDF$

Entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Teorema ángulo – lado – ángulo (ALA)

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes un lado y los ángulos adyacentes a este lado, entonces los triángulos son congruentes.



En la figura

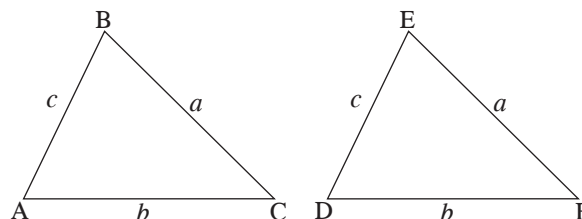
Si $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ y $\angle BCA \cong \angle EFD$

Entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Teorema lado – lado – lado (LLL)

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes sus tres lados, entonces los triángulos son congruentes.



En la figura

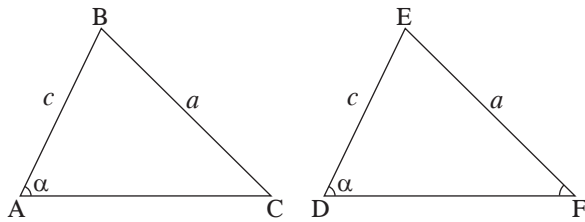
Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Entonces

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Corolario lado – lado – ángulo (LLA)

Si dos triángulos tienen ordenadamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de estos dos lados, entonces los triángulos son congruentes.



En la figura

Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ tal que $BC > AB$ y $\angle BAC \cong \angle EDF$.

Entonces

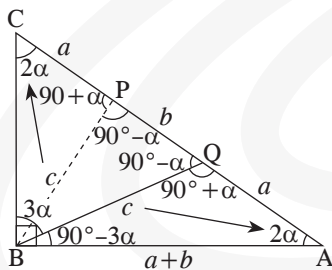
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Ejemplo

- En un triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana $\overline{BQ}$, tal que $\overline{CQ} = \overline{AB}$ y $2(m\angle CBQ) = 3(m\angle BAC)$, halle $m\angle BAC$.

- A) 30° B) 37° C) 40°
D) 45° E) 60°

Resolución



Dato $\overline{AB} \cong \overline{CQ}$

Piden α

Se observa

$$m\angle QBA = 90^\circ - 3\alpha$$

$$\rightarrow m\angle BQC = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{Sea } BP = BQ = c$$

$$\rightarrow m\angle BPQ = 90^\circ - \alpha$$

$\triangle PAB$: isósceles

$$PA = BA = a + b$$

$$\triangle BPC \cong \triangle BQA \text{ (LAL)}$$

$$\rightarrow m\angle BCA = 2\alpha$$

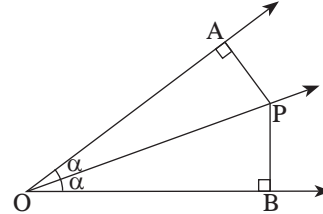
$$\triangle ABC: 4\alpha = 90^\circ$$

$$\therefore \alpha = 22,5^\circ$$

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Teorema de la bisectriz

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

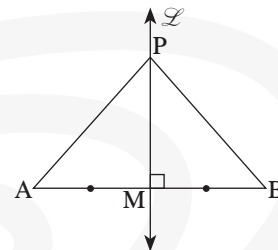


Según la figura, $\overline{OP}$ es bisectriz del $\angle AOB$

Entonces: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

Teorema de la mediatriz

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

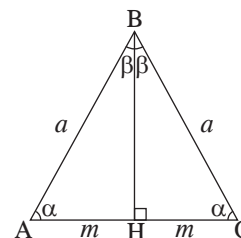


Según la figura, $\mathcal{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$

Entonces: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\angle A \cong \angle B$.

Teorema de los triángulos isósceles

En un triángulo isósceles la altura relativa a la base, es también una mediana, una bisectriz interior y una parte de la mediatriz $\overline{BH}$.



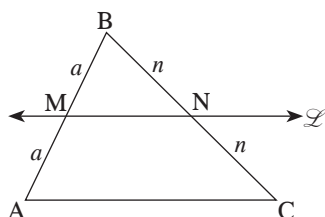
Según la figura, el triángulo ABC es isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$).

Entonces

- $\overline{BH}$ es
- Altura
 - Mediana
 - Bisectriz
 - Parte de la recta mediatriz $\overline{BH}$

Teorema de los puntos medios

Toda recta trazada por el punto medio de un lado de un triángulo paralela a otro lado, interseca al tercer lado en su punto medio.



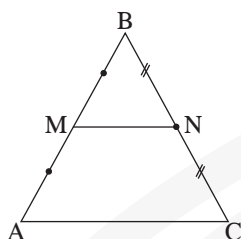
Según la figura $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

Entonces $\overline{BN} \cong \overline{NC}$

$\overline{MN}$ se denomina base media

Teorema de la base media

En todo triángulo, una base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.



Según la figura, si $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overline{BN} \cong \overline{NC}$

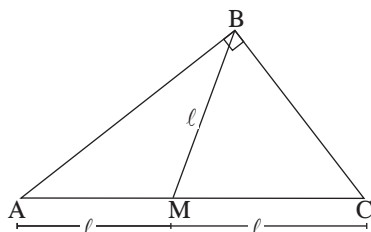
Entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

$\overline{MN}$: base media

Se demuestra $MN = \frac{AC}{2}$

Teorema de la menor mediana en el triángulo rectángulo

La longitud de la mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.



Según la figura, si el triángulo ABC es recto en B y $\overline{BM}$ es mediana

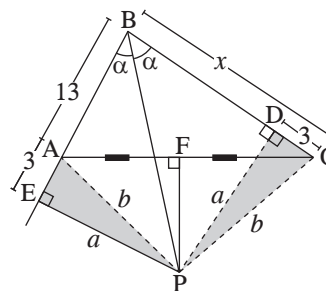
Entonces $BM = \frac{AC}{2}$

Ejemplo

➤ Dado un triángulo ABC, en el exterior y relativo al lado $\overline{AC}$ se ubica el punto P, tal que $\overline{BP}$ es bisectriz del ángulo ABC; $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ son perpendiculares a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$ respectivamente (B-A-E y A-F-C). Si $AB = 13$ u, $AE = 3$ u y $\overline{AF} \cong \overline{FC}$, halle BC.

- A) 16 u B) 17 u C) 18 u
D) 19 u E) 20 u

Resolución



Piden: $BC = x$

Dato: $\overline{AF} \cong \overline{FC}$

Por T. de la Mediatriz

$AP = PC = b$

Sea $\overline{PD} \perp \overline{BC}$

T. Bisectriz

$PE = PD = a$ y $BE = BD = 16$ u

$\triangle AEP \cong \triangle CDP$ (LLA)

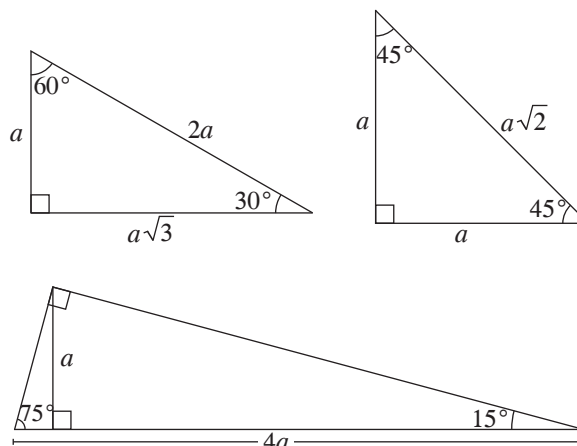
$\rightarrow DC = AE = 3$ u

$\therefore BC = 19$ u

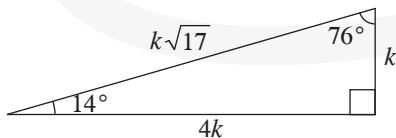
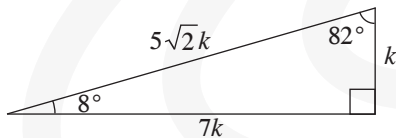
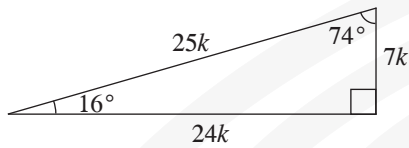
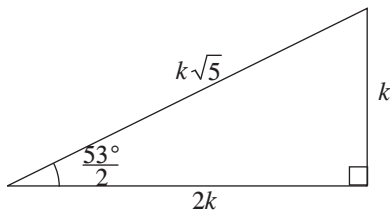
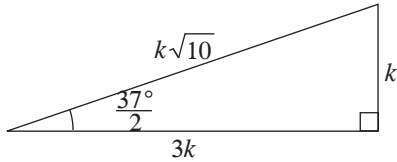
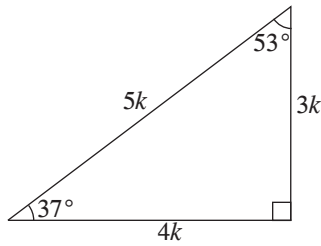
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos triángulos rectángulos en los cuales las medidas de los ángulos agudos son exactas. Conociendo la medida de uno de sus ángulos agudos se conoce también la razón entre las longitudes de sus lados.

Triángulos rectángulos notables

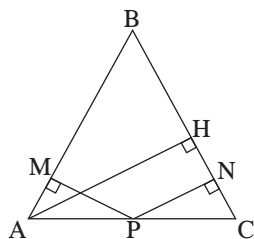


Triángulos rectángulos aproximados



Teoremas

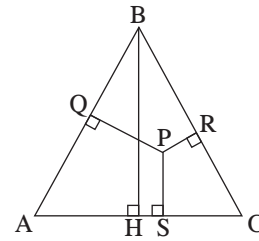
1. Triángulo isósceles



Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$$\Rightarrow AH = PM + PN$$

2. Triángulo equilátero



Si $AB = BC = AC$

$$\Rightarrow BH = PQ + PR + PS$$

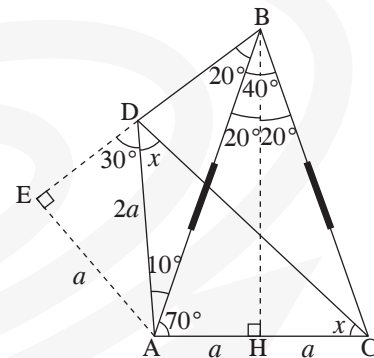
Ejemplo

➤ En el exterior y relativo al lado $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se ubica el punto P , $\overline{AB} = \overline{BC}$. Si $m\angle ABC = 40^\circ$, $m\angle DBA = 20^\circ$ y $m\angle DAB = 10^\circ$, halle $m\angle ACD$.

A) 40° B) 45° C) 48°

D) 50° E) 54°

Resolución



Piden x

Sea $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

$\rightarrow AH = HC = a$

$m\angle ABH = m\angle HBC = 20^\circ$

T. Bisectriz

$AE = AH = a$

$\triangle AED$ (Notable 30° y 60°)

$\rightarrow AD = 2a$

$\triangle DAC$: isósceles

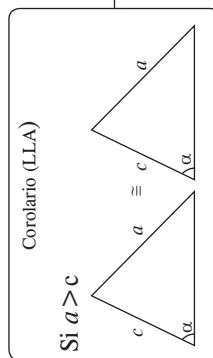
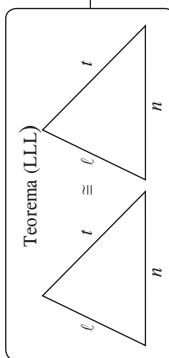
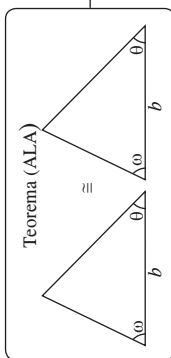
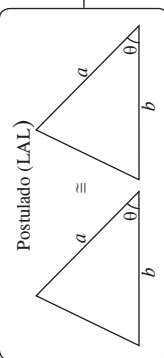
$x + x + 80^\circ = 180^\circ$

$\therefore x = 50^\circ$

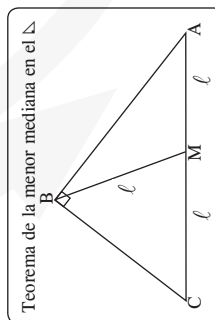
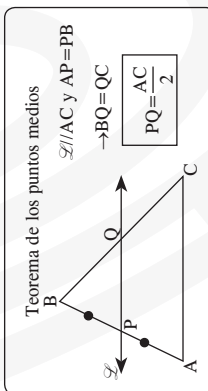
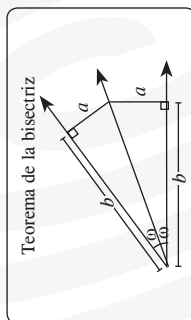
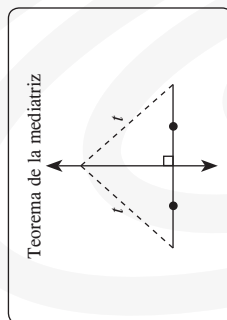


CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Definición

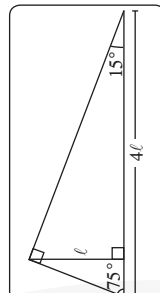
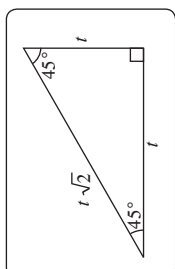
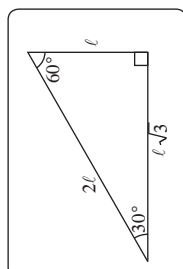


Aplicaciones

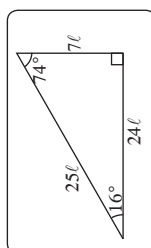
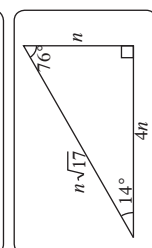
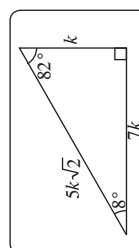
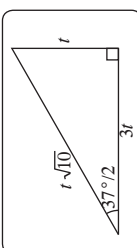
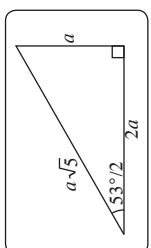
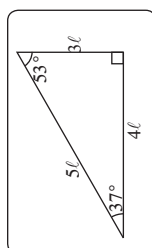


Δ Notables

Exactos



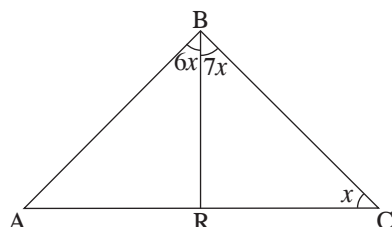
Aproximados





Problemas resueltos

1. (UNI 2016-1) En la figura siguiente, si $AB = RC$.



Halle el valor de x .

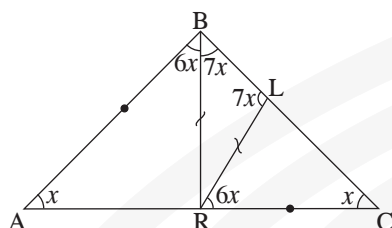
- A) 8° B) 10° C) 12°
D) 14° E) 15°

Resolución

Piden x

Trazamos $\overline{RL}$, tal que $m\angle LRC = 6x$.

Luego



$$\triangle ABR \cong \triangle CRL$$

Se deduce que

$$m\angle BAR = m\angle LCR = x$$

Finalmente, en el $\triangle ABC$

$$x + 13x + x = 180^\circ$$

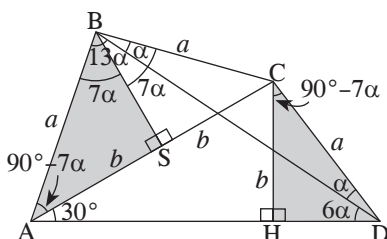
$$15x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 12^\circ$$

2. (UNI 2017-1) En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$. Si $m\angle ABD = 13(m\angle DBC)$ y $m\angle ADB = 6(m\angle DBC)$, halle $m\angle DBC$.

- A) 2° B) 3° C) 4°
D) 5° E) 6°

Resolución



Piden: $m\angle DBC = \alpha$

$\triangle ABC$: isósceles

$$\rightarrow m\angle BAS = 90^\circ - 7\alpha$$

$$AS = SC = b$$

$\triangle ASB \cong \triangle CHD$ (ALA)

$$\rightarrow AS = CH = b$$

$\triangle AHC$: notable de 30° y 60°

$$\rightarrow m\angle CAH = 30^\circ$$

$\triangle ABD$ ($S_{m\angle i} = 180^\circ$)

$$\therefore \alpha = 5^\circ$$

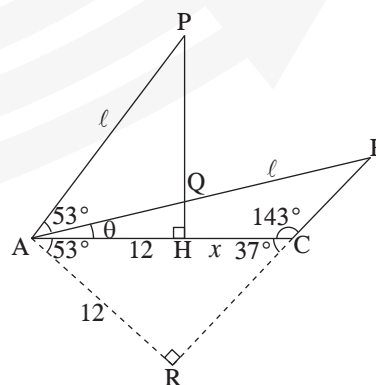
3. (UNI 2017-1) En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto H, por dicho punto se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a $\overline{AC}$, la cual interseca a $\overline{AB}$ en Q. Si $m\angle PAB = 53^\circ$, $m\angle ACB = 143^\circ$, $AP = AB$ y $AH = 12$ m. Halle $\overline{HC}$, en m.

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución

Piden: $\overline{HC} = x$

Dato: $\overline{AP} = \overline{AB}$, $\overline{AH} = 12$



Trazamos $\overline{AR} \perp \overline{BC}$.

$$m\angle PAH = m\angle BAR = 53^\circ + \theta$$

$$\rightarrow \triangle AHP \cong \triangle ARB$$
 (ALA)

$$\rightarrow AH = AR = 12 \text{ m}$$

Además

$\triangle ARC$: notable de 37° y 53°

$$\rightarrow 12 + x = 20$$

$$\therefore x = 8 \text{ m}$$

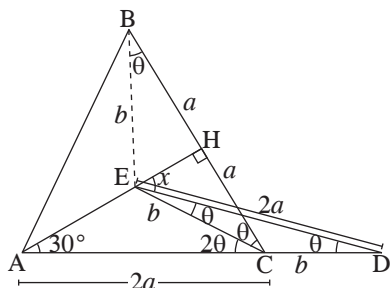
4. (UNI 2014-2) En un triángulo equilátero ABC , sobre la altura $\overline{AH}$ ($H \in \overline{BC}$) se ubica el punto E y en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto D , tal que $\overline{EC} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{ED}$. Halle la $m\angle HED$.

- A) 40° B) 45° C) 48°
D) 50° E) 52°

Resolución

Nos piden $m\angle HED = x$

Por dato, el $\triangle ABC$ es equilátero, $\overline{EC} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{ED}$.



$$m\angle CED = m\angle CDE = \theta$$

$$\rightarrow m\angle ECA = 2\theta$$

Trazamos $\overline{BE}$, entonces se observa que:

$$\triangle ECD \cong \triangle BEC \text{ (LLL)}$$

$$m\angle ECB = m\angle CDE = \theta$$

En el vértice C:

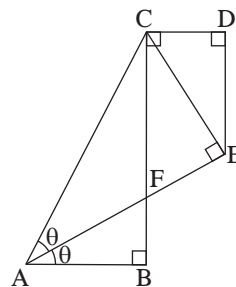
$$3\theta = 60^\circ \rightarrow \theta = 20^\circ$$

Luego, en el $\triangle EHC$

$$\theta + \theta + x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

5. (UNI 2014-1) En la figura, $BF = 3$ u y $ED = 4$ u. Halle CF , en u.

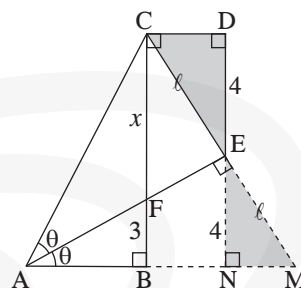


- A) 4,5 B) 5 C) 5,5
D) 6 E) 6,5

Resolución

Nos piden $CF = x$.

Datos: $BF = 3$ u y $ED = 4$ u



Se prolonga $\overline{CE}$, entonces el $\triangle ACM$ es isósceles y $CE = EM = \ell$.

Luego, se prolonga $\overline{DE}$ hasta intersectar a $\overline{BM}$; entonces

$$\triangle CDE \cong \triangle MNE; \text{ (ALA)} \quad DE = EN = 4$$

En el $\triangle CBM$, $\overline{EN}$ es base media; entonces

$$4 = \frac{x+3}{2}$$

$$\therefore x = 5$$



Helicopráctica

Nivel I

1. En un triángulo equilátero ABC se ubican los puntos P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$ de modo que $\overline{AP} \cong \overline{BQ}$. Halle la medida del ángulo que determina $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$.

Resolución

3. En un triángulo ABC se ubica el punto N en la prolongación de $\overline{AC}$, tal que $\overline{CN} = \overline{AB}$ y $m\angle BAC = 80^\circ$. Si las mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{AN}$ se intersecan en P , halle $m\angle CNP$.

Resolución

2. En un triángulo ABC , $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, se traza la ceviana interior $\overline{CE}$, tal que $m\angle ABC = 40^\circ$ y $m\angle BCE = 20^\circ$. Calcule $\frac{AC}{BE}$.

Resolución

4. En un triángulo ABC , se ubica un punto interior F . Si $m\angle BAF = 18^\circ$, $m\angle FAC = 27^\circ$, $m\angle ACF = 45^\circ$ y $\overline{AF} \cong \overline{BC}$, halle $m\angle FBC$.

Resolución

- ### *Resolución*

-

Resolución

- ### *Resolución*

-

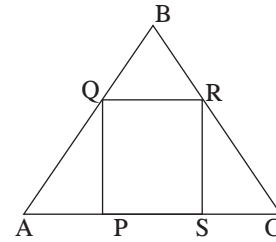
Resolución

Nivel III

9. En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , en la mediatriz de $\overline{AC}$ se ubica el punto E , tal que $AC = 2(BE)$. Calcule $\frac{m\angle BCA}{m\angle EBC}$. (E es un punto exterior relativo al lado $\overline{BC}$).

Resolución

11. En la figura mostrada, halle la longitud del lado del cuadrado $PQRS$ si el lado del triángulo equilátero mide 3 m.

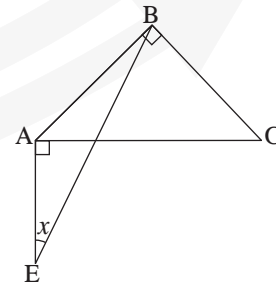


Resolución

10. En el interior de un triángulo rectángulo ABC , recto en B , se ubica el punto K , tal que $AK = KC = a$, $AC = b$, $m\angle AKC = 4(m\angle BAC)$ y R es punto medio de $\overline{AK}$, calcule RB .

Resolución

12. En la figura mostrada, $AB = BC$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AC} \perp \overline{AE}$ y $AC = AE$, halle el valor de x .



Resolución



Helicotaller

Nivel I

- En un triángulo ABC, se trazan los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{BF}$ en el exterior relativo a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tales que $m\angle ABE = m\angle CBF = 46^\circ$, si $\overline{BA} \cong \overline{BE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{BF}$, halle la medida del mayor ángulo determinado por $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$.

Resolución

- En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$, tal que $\overline{AP}$ interseca perpendicularmente a $\overline{BQ}$ en M. Si $\overline{AP} \cong \overline{BQ}$, $BP = AQ = \sqrt{10}$ cm y BQ toma su menor valor entero, calcule $AM - MQ$.

Resolución

- En el interior de un triángulo ABC se ubica un punto

P, tal que $\overline{AB} \cong \overline{PC}$, $m\angle BAP = m\angle ACP = \frac{m\angle ABP}{2} = \frac{m\angle APC}{2}$ y $AP = 8$ cm. Halle AC, en cm.

Resolución

Nivel II

- En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BD}$. Si la $m\angle ABD = 30^\circ$ y $\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC}$, entonces la $m\angle BAC$ es

Resolución

5. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Si $F \in \overline{EC}$, $\overline{BF} \cap \overline{AD} = \{G\}$, $m\angle EBF = m\angle FBC$, $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ ($M \in \overline{AD}$) y $BE - BD = k$, halle FM .

Resolución

Nivel III

7. En un triángulo ABC , $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, se trazan la bisectriz interior del ángulo A y la bisectriz exterior del ángulo C , las que se intersectan en P , $\overline{PH}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ en H . Si $BH = 3$ cm, halle AC .

Resolución

6. En un triángulo ABC , $m\angle B = 130^\circ$. Si las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ intersectan a $\overline{AC}$ en P y Q , halle la $m\angle PBQ$.

Resolución

8. En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$ y en el triángulo ADC se trazan la bisectriz interior $\overline{DM}$ y la bisectriz exterior $\overline{DN}$. Si $AD = 5$ cm, halle MN .

Resolución



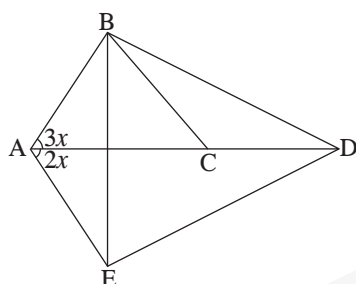
Test 1

Nivel I

1. En un triángulo ABC, $AB = 12$ cm, $m\angle A = 72^\circ$ y $m\angle C = 36^\circ$, la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a $\overline{AC}$ en el punto E. Halle EC.

A) 12 cm B) 18 cm C) 36 cm
D) 39 cm E) 78 cm

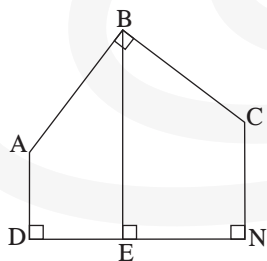
2. En la figura mostrada, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AE} \cong \overline{CD}$ y $m\angle BED = m\angle BDE$. Halle el valor de x .



A) 18° B) 20° C) $22,5^\circ$
D) 25° E) 30°

Nivel II

3. En la figura mostrada, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $AD = 2$ cm, $CN = 5$ cm y $BE = 8$ cm. Halle DN.



A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm
D) 8 cm E) 9 cm

4. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la bisectriz del ángulo exterior A interseca a la prolongación de la altura $\overline{BH}$ en F. Si $AB + AH = 4$ cm y $HF = 3$ cm, halle BH, en cm.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Nivel III

5. En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores de los ángulos A y C. Desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ respectivamente (P y Q en dichas bisectrices interiores). Si $AC = 4(PQ)$, halle la razón entre el perímetro del triángulo ABC y la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12



Test 2

Nivel I

- En un triángulo equilátero ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{BL}$ y $\overline{CN}$ que determinan un ángulo que mide 60° . Si $\overline{BN} = 3$ cm y $\overline{LC} = 7$ cm, halle $\overline{AB}$, en cm.
A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 10

- En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la bisectriz interior trazada desde el vértice A interseca a la perpendicular a la hipotenusa trazada por el vértice B, en el punto E. El punto E dista 3 cm de $\overline{BC}$ y 4 cm de $\overline{AC}$, halle $\overline{BE}$, en cm.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Nivel II

- En la región interior de un triángulo ABC se ubica un punto P, tal que: $m\angle PAC = 30^\circ$, $m\angle PAB = m\angle PBA = 50^\circ$ y $m\angle PBC = 10^\circ$. Calcule $m\angle PCB$.
A) 5° B) 10° C) 15°
D) 18° E) 20°

- En la región exterior de un triángulo ABC y relativo a $\overline{BC}$ se ubica el punto D, tal que $m\angle ADC = 90^\circ$, $m\angle BAD = m\angle CAD = m\angle ACB = 10^\circ$ y $\overline{AB} = 6$ cm. Halle $\overline{CD}$.
A) 3 cm B) 6 cm C) 7 cm
D) 8 cm E) 12 cm

Nivel III

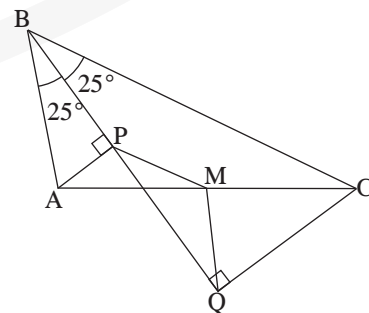
- En la prolongación del lado $\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica el punto D, tal que $\overline{AC} = 10$ cm; $\overline{CD} = 1$ cm y $m\angle BDC = 2(m\angle BAC)$. Halle $m\angle BAC$.
A) 7° B) 8° C) 14°
D) $18,5^\circ$ E) $26,5^\circ$



Helicodesafío

- D es un punto exterior y relativo al lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, de modo que $m\angle BAC = m\angle CAD = 20^\circ$, $m\angle DBC = 100^\circ$ y $m\angle BCA = 30^\circ$, halle $m\angle ACD$.
A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 20°
- Dado el triángulo ABC, obtuso en A, se traza la mediana $\overline{BM}$, de modo que $m\angle ABM = 45^\circ - x$, $m\angle BCM = 2(m\angle MBC) = 2x$. Halle el valor de x .
A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°
- Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en el cual $m\angle B = 20^\circ$. Si $\overline{AP}$ es bisectriz del ángulo A (P en el exterior), tal que $m\angle APB = 30^\circ$, halle $m\angle BCP$.
A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

- Según la figura, $\overline{AM} = \overline{MC}$, halle $m\angle PMQ$.



- A) 115° B) 110° C) 130°
D) 120° E) 125°
- En el interior de un triángulo ABC se ubica el punto Q, de modo que $\frac{m\angle BAQ}{2} = \frac{m\angle QAC}{2} = \frac{m\angle BCQ}{3} = m\angle QCA = 10^\circ$, halle la $m\angle QBC$.
A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 90°



Objetivos

- Define al polígono y conoce sus elementos.
- Reconoce los diferentes tipos de polígonos.
- Aplica los teoremas en los polígonos.



Sabías que...

Abejas

¿Cuántas abejas componen una colmena? ¿Cuándo se divide una colmena?

Hay miles de especies de abejas, unas viven solas, otras en agujeros en el suelo, algunas no tienen aguijón. La *Apis mellifera* (o abeja doméstica) forma colonias de entre 15 000 y 80 000 abejas, dependiendo de su fortaleza, climatología y hábitat. Las colmenas definen al superorganismo que forman tres tipos de individuos: La reina (una), las obreras (casi la totalidad) y los zánganos (menos del 4% o ninguno, dependiendo de la época del año).

¿Por qué las celdillas de las colmenas tienen forma de hexágono?

Si las celdas de los panales fuesen cuadradas optimizarían el espacio, pero los insectos necesitan un cubículo adecuado a la anatomía que tendrán tras su metamorfosis. Si las celdas fueran cilíndricas serían ideales para la crianza pero se perdería mucho espacio y se emplearía más cera de la necesaria... por tanto, las abejas siempre construyen sus celdas en hexágonos perfectos, maximizando la superficie útil.



Panel de Abejas



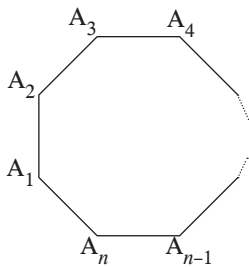


Helicoteoría

POLÍGONO

Definición

Dados los puntos coplanarios $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-1}, A_n$ distintos, donde $n > 2$, la unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$, tal que dos segmentos consecutivos no deben ser colineales y dos segmentos cualesquiera solo pueden intersectarse en sus extremos, recibe el nombre de polígono.



ELEMENTOS DEL POLÍGONO

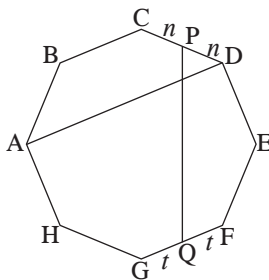
- Los puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ se denominan vértices del polígono.
- Los segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ se denominan lados del polígono.
- Dos segmentos con un vértice común determinan un ángulo al cual denominaremos ángulo del polígono.

Diagonal

Es el segmento que tiene por extremos dos vértices no consecutivos del polígono.

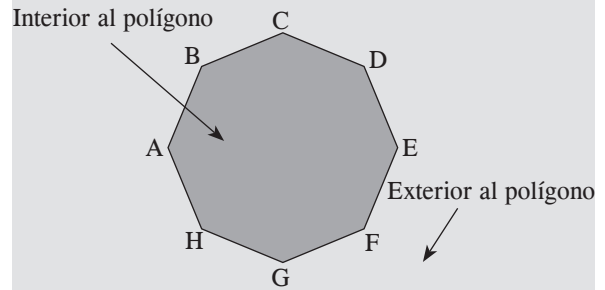
Diagonal media

Es el segmento que tiene por extremos los puntos medios de dos lados cualesquiera del polígono.



En la figura $\overline{AD}$ es una diagonal y $\overline{PQ}$ es una diagonal media.

Todo polígono determina en el plano que lo contiene tres subconjuntos de puntos:



Anotación

En un polígono de n lados existen n vértices y n ángulos internos.



Anotación

El perímetro del polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados.



Anotación

Región poligonal es la unión del polígono y su interior.

NOMBRE DE POLÍGONOS

Hay algunos polígonos que debido a la cantidad de lados que tiene reciben un nombre, estos son:

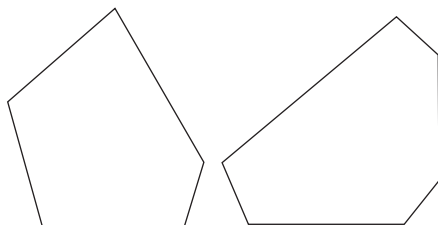
Triángulo	: 3 lados
Cuadrilátero	: 4 lados
Pentágono	: 5 lados
Hexágono	: 6 lados
Heptágono	: 7 lados
Octágono	: 8 lados
Nonágono o eneágono	: 9 lados
Decágono	: 10 lados
Endecágono	: 11 lados
Dodecágono	: 12 lados
Pentadecágono	: 15 lados
Icoságono	: 20 lados

Los polígonos restantes se nombran según el número de lados. Por ejemplo: polígono de 14 lados, polígono de 25 lados, etc.

TIPOS DE POLÍGONO

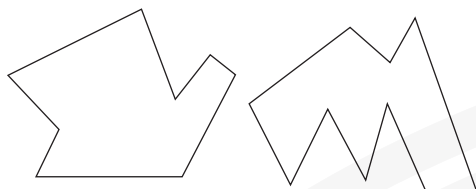
1. Polígono convexo

Se denomina polígono convexo cuando el interior es un conjunto convexo.



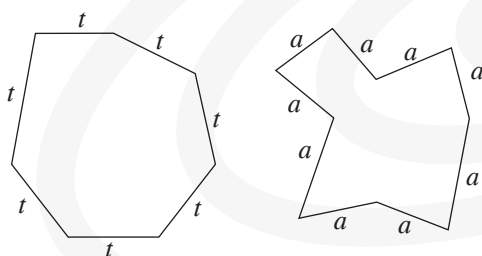
2. Polígono no convexo

Se denomina polígono no convexo cuando el interior es un conjunto no convexo.



3. Polígono equilátero

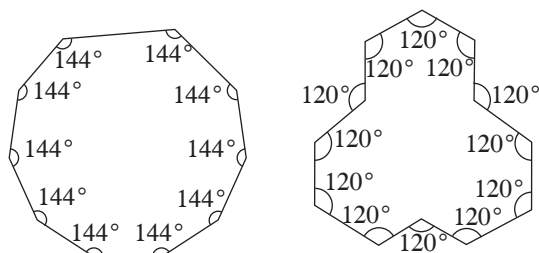
Se denomina polígono equilátero cuando sus lados son congruentes.



En los gráficos mostrados podemos observar que hay polígonos equiláteros convexos y polígonos equiláteros no convexos.

4. Polígono equiángulo

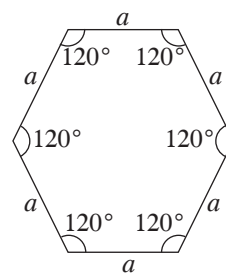
Se denomina polígono equiángulo cuando sus ángulos son congruentes.



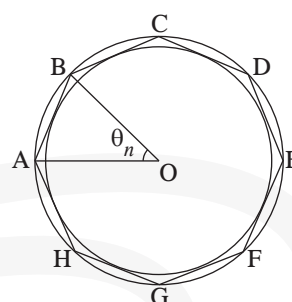
En los gráficos mostrados podemos observar que hay polígonos equiángulos convexos y polígonos equiángulos no convexos.

5. Polígono regular

Definición: Se denomina polígono regular si es convexo es equiángulo y equilátero.



Todo polígono regular puede ser inscrito y circuncrito a circunferencias concéntricas a cuyo centro se denomina centro del polígono regular.



O: centro del polígono regular

$\angle AOB$: ángulo central del polígono regular. Sea θ_n la medida del ángulo central.

$$\theta_n = \frac{360^\circ}{n}$$

n es el número de lados del polígono regular.



Anotación

Los polígonos que no cumplen las condiciones del polígono regular reciben el nombre de polígonos irregulares.

TEOREMAS

I. Para polígonos convexos de n lados

- Suma de las medidas de los ángulos internos (S_i)

$$S_i = 180^\circ(n - 2)$$

- Suma de las medidas de los ángulos externos (S_e)

$$S_e = 360^\circ$$

II. Número de diagonales trazadas desde un vértice (D_{1v})

$$D_{1v} = n - 3$$

III. Número de diagonales de un polígono (D)

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

IV. Número de diagonales medias trazadas desde el punto medio de un lado (DM_{IL})

$$DM_{IL} = n - 1$$

V. Número de diagonales medias de un polígono (DM)

$$DM = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ejemplo

- En un polígono convexo el número de diagonales es 9, entonces el número de diagonales medias es

- A) 12. B) 15. C) 18.
D) 24. E) 20.

Resolución

Piden: DM

Dato: D=9

Utilizando el teorema

$$\frac{n(n-3)}{2} = 9$$

Entonces: $n=6$

$$DM = \frac{n(n-1)}{2}$$

Reemplazando:

$$DM = \frac{6(6-1)}{2}$$

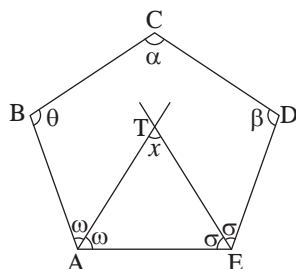
∴ DM=15

Ejemplo

- En un pentágono convexo, la suma de las medidas de tres ángulos interiores consecutivos es 300° . Halle la medida del ángulo formado por las bisectrices interiores de los otros dos ángulos.

- A) 60° B) 50° C) 80°
D) 40° E) 70°

Resolución



Piden: x

Dato: $\theta + \alpha + \beta = 300^\circ$

Por suma de ángulos interiores en el pentágono

$$\theta + \alpha + \beta + 2\omega + 2\sigma = 180^\circ(5-2)$$

Reemplazando

$$300^\circ + 2\omega + 2\sigma = 540^\circ \rightarrow \omega + \sigma = 120^\circ$$

En el triángulo ATE

$$\omega + \sigma + x = 180^\circ$$

De donde: $120^\circ + x = 180^\circ$

∴ $x = 60^\circ$

VI. Número de diagonales trazadas desde k vértices consecutivos (D_{KVC})

$$D_{KVC} = n \cdot k - \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

VII. Número de diagonales medias trazadas desde los puntos medio de k lados consecutivos (D_{KLC})

$$D_{KLC} = n \cdot k - \frac{(k)(k+1)}{2}$$

VIII. Para polígonos equiángulos convexos

- Medida del ángulo interior (i):

$$i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

- Medida del ángulo exterior (e):

$$e = \frac{360^\circ}{n}$$

Ejemplo

- En un polígono regular, la medida de su ángulo interior es igual a 150° . Calcule el número de diagonales de dicho polígono.

- A) 54 B) 45 C) 36
D) 63 E) 72

Resolución

Piden: D

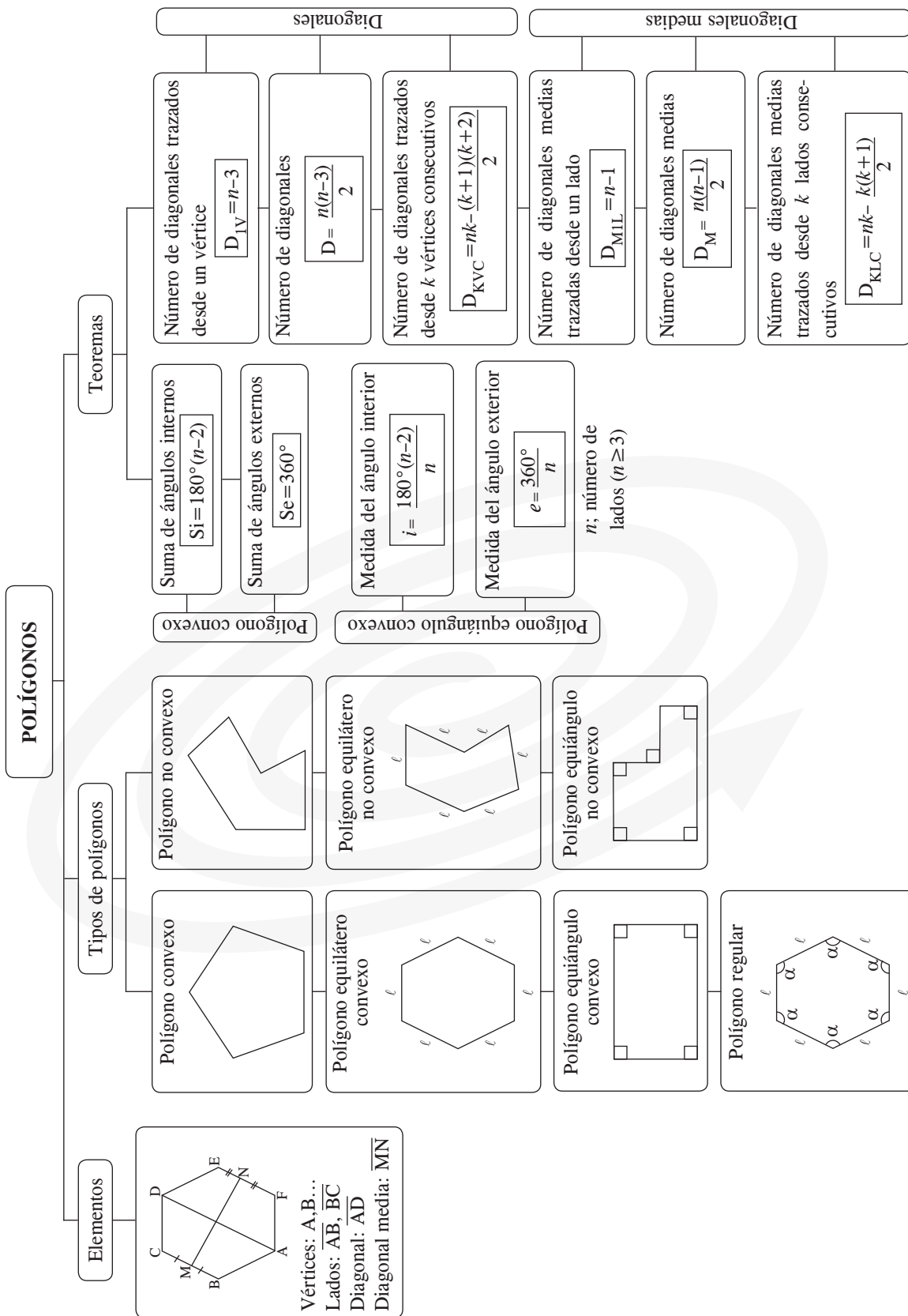
Dato: $m\angle i = 150^\circ$

Entonces: $m\angle e = 30^\circ$

$$\text{de donde: } m\angle e = 30^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = 12$$

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2}$$

∴ D=54





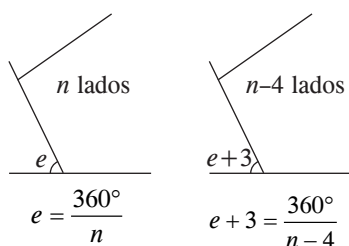
Problemas resueltos

1. En un polígono regular de n lados, al disminuir su número de lados en 4, resulta otro polígono regular donde la medida de cada ángulo externo aumenta en 3° . Halle el valor de n .

- A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 30

Resolución

Del enunciado se obtiene la siguiente figura



$$\text{Reemplazando: } \frac{360^\circ}{n} + 3 = \frac{360^\circ}{n-4}$$

De donde: $n=24$

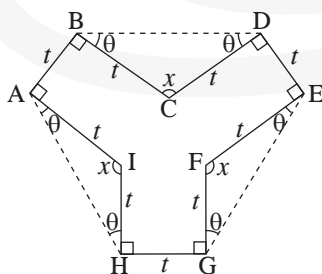
$$\therefore n=24$$

2. Se tiene un eneágono equilátero, donde seis de los ángulos son rectos y los otros tres son congruentes entre sí y miden x . Halle el valor de x .

- A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 120°

Resolución

Del enunciado se tiene la siguiente figura.



Piden: x

Los triángulos BCD, GFE y AIH son congruentes por el caso LAL.

Por suma de las medidas de los ángulos internos en el polígono ABDEGH

$$6(90^\circ) + 6\theta = 180^\circ(6-2)$$

$$\text{De donde: } \theta = 30^\circ$$

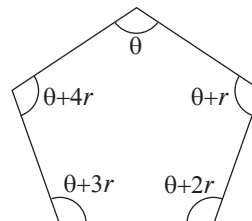
$$\text{Pero: } 2\theta + x = 180^\circ$$

$$\therefore x=120^\circ$$

3. Las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo están en progresión aritmética, halle el mayor valor entero de la razón de la progresión.

- A) 25° B) 27° C) 32°
D) 35° E) 36°

Resolución



Piden: $r_{\text{máx. ent.}}$

Por suma de ángulos internos

$$5\theta + 10r = 180^\circ(5-2) = 540^\circ$$

$$\text{de donde: } \theta + 2r = 108^\circ \dots (1)$$

Como el polígono es convexo, entonces

$$\theta + 4r < 180^\circ \dots (2)$$

(1) en (2):

$$108^\circ - 2r + 4r < 180^\circ$$

$$\text{De donde: } r < 36^\circ$$

$$\therefore r_{\text{máx. ent.}} = 35^\circ$$

4. En un polígono regular, los $\frac{5}{2}$ de la medida del ángulo interior es igual al cuadrado de la medida de su ángulo exterior. Calcule el número de lados de dicho polígono.

- A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

Resolución

Sea n el número de lados del polígono.

Piden: n

i : Medida del ángulo interno

e : Medida del ángulo externo

$$\text{Dato: } \frac{5}{2} i = e^2$$

Reemplazando

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \left(\frac{360^\circ}{n} \right)^2$$

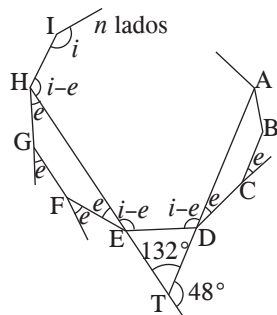
$$\text{De donde: } n=18$$

$$\therefore n=18$$

5. En un polígono regular ABCDEFGHI..., las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{HE}$ se intersectan en P de modo que $m\angle APH = 132^\circ$, entonces el número de diagonales de dicho polígono es

- A) 370. B) 375. C) 400.
D) 405. E) 435.

Resolución



Piden: N.º de diagonales = D

Por suma de ángulos externos en el triángulo EDT

$$i - e + i - e + 48^\circ = 360^\circ$$

$$\text{de donde: } i - e = 156^\circ \dots\dots\dots (1)$$

En cada vértice de un polígono se cumple:

$$i + e = 180^\circ \dots (2)$$

$$\text{de (1) y (2): } i = 168^\circ \text{ y } e = 12^\circ$$

$$\text{Pero: } e = 12^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 30$$

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{30(30-3)}{2}$$

$$\therefore D = 405$$



Helicopráctica

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- a. La suma de las medidas de los ángulos internos de un octógono equiángulo no regular puede ser 1080° . ()
b. La suma de las medidas de los ángulos internos de un hexágono equiángulo no regular puede ser 720° . ()
c. La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono equiángulo no regular puede ser 540° . ()

Resolución

2. Se tienen dos polígonos regulares donde sus ángulos externos son suplementarios y uno de ellos no tiene diagonales. Calcule la suma de las medidas de tres de sus ángulos exteriores para el polígono mayor.

Resolución

3. Al aumentar el número de lados de un polígono equiángulo convexo en 4, la medida de su ángulo exterior disminuye en sus $\frac{4}{11}$. Entonces el número de lados es:

Resolución

Nivel II

5. En un polígono convexo, el número de diagonales medias y el número de diagonales están en la relación de 5 a 3. Calcule la suma de las medidas de los ángulos interiores.

Resolución

4. En un polígono de n lados desde $(n - 5)$ vértices consecutivos se han trazado $(2n - 2)$ diagonales. Calcule el número de diagonales medias del polígono.

Resolución

6. En un polígono equiángulo convexo ABCDEF ..., las bisectrices de los ángulos ABC y DEF determinan un ángulo congruente con un ángulo del polígono. Calcule el número de diagonales del polígono.

Resolución

7. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- a. Todo polígono equiángulo es convexo. ()
- b. Todo polígono equiángulo es equilátero. ()
- c. Todo polígono regular es equiángulo. ()

Resolución

9. En un polígono equiángulo convexo $ABCDE\dots$, la bisectriz del ángulo ABC y la mediatriz de $\overline{DE}$ determinan un ángulo que mide 100° . Halle la medida del ángulo exterior.

Resolución

8. En dos polígonos convexos, las sumas de las medidas de sus ángulos interiores difieren en 540° . Si el número de diagonales del polígono de mayor número de lados es 5 veces el número de lados del otro polígono, entonces el número de lados de uno de los polígonos es

Resolución

10. Si el mínimo número de ángulos interiores obtusos de un polígono convexo es K , halle el número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de sus ángulos interiores.

Resolución

11. Determine la medida del ángulo central del polígono regular, si el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos internos es igual al número de diagonales trazados de tres vértices consecutivos.

Resolución

12. Se tiene 2 polígonos cuyos números de diagonales se diferencian en 98. Calcule la diferencia entre los números de sus diagonales medias si la diferencia entre los números de sus lados es el mayor posible.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Si el número de lados de un polígono equiángulo se duplica, entonces la medida de su ángulo exterior disminuye en 30° . Calcule el número de lados del polígono original.

Resolución

2. Si al número de lados de un polígono se disminuye en 2, entonces el número de diagonales totales disminuye en 15. Calcule el número total de diagonales medias del polígono original.

Resolución

3. Se tiene un polígono regular $ABCD\dots$ y el cuadrado $BCPQ$, tal que Q está ubicado en la prolongación de $\overline{DC}$. Halle $m\angle CAQ$.

Resolución

5. En un hexágono equilátero no convexo $ABCDEF$, $m\angle BCD = 20^\circ$, $m\angle FAB = m\angle DEF = 60^\circ$ y $m\angle ABC = m\angle CDE = m\angle EFA = x$. ¿Cuál es el valor de x ?

Resolución

Nivel II

4. Si un polígono de n lados tiene $(n-3)$ lados entonces tendría $(n+3)$ diagonales menos. Calcule el número de vértices del polígono original.

Resolución

6. En un hexágono equiángulo convexo $ABCDEF$, si $AB = 3$ u, $BC = 7$ u, $CD = 2$ u y $DE = 4$ u, entonces AF , en u, es

Resolución

Nivel III

7. Los polígonos regulares ABCDEF y BCPQR están ubicados en diferentes semiplanos con respecto a $\overline{BC}$, tal que las rectas $\overleftrightarrow{PD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ se intersectan en el punto I. Entonces la medida del ángulo PIE es

Resolución

8. En un polígono regular se desea saber, ¿en cuánto aumenta el número de diagonales, cuando el número de lados aumenta en 2 si la medida del ángulo interior aumenta en 2?

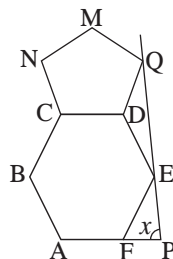
Resolución



Test 1

Nivel I

1. Se tiene el octógono regular ABCDEFGH, siendo M punto medio de $\overline{CD}$ y N punto medio de $\overline{AM}$, $\overline{NR} \parallel \overline{AB}$ y $R \in \overline{BC}$. Si $AB=2$, halle NR.
- A) 2 B) 1 C) 1,5
D) $2\sqrt{2}$ E) $3/4$
2. Si ABCDEF y CNMQD son polígonos regulares, calcule el valor de x .



- A) 86° B) 84° C) 88°
D) 78° E) 76°

Nivel II

3. En un polígono regular, la diferencia de medidas entre el ángulo interior y el ángulo exterior es igual a la medida del ángulo central. ¿Cuántas diagonales en total tiene dicho polígono?
- A) 5 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15
4. En un polígono regular ABCDEF ..., las bisectrices de los ángulos interiores de vértices A y E se intersectan en M de modo que el polígono ABCDEM sea convexo y que la $m\angle AME = m\angle ABC$, calcule el número de diagonales del polígono inicial.
- A) 20 B) 27 C) 35
D) 44 E) 54

Nivel III

5. Si a la medida de los ángulos interiores de un polígono equiángulo convexo se le disminuye en 9° , el número de lados se reduce en dos, ¿cuántas diagonales tiene el polígono?
- A) 40 B) 50 C) 35
D) 25 E) 45



Test 2

Nivel I

- En un polígono convexo, al duplicar el número de lados, la suma de medidas de sus ángulos internos se cuadruplica. Calcule el número de diagonales de dicho polígono.
A) 12 B) 7 C) 5
D) 0 E) 2
- En un polígono convexo, la suma entre el número de ángulos rectos a que equivale la suma de los ángulos interiores con el número de vértices es igual a 23. Calcule el número de lados de dicho polígono.
A) 12 B) 9 C) 8
D) 16 E) 10

Nivel II

- Treinta veces la medida del ángulo interior de un polígono equiángulo convexo es igual al cuadrado de la medida de su ángulo exterior. Calcule el número de diagonales que se puedan trazar de 3 vértices consecutivos.
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10
- Calcule el número de diagonales que se pueden trazar de 12 vértices consecutivos en un polígono regular ABCDE... si $m\angle ACE = 132^\circ$
A) 89 B) 77 C) 101
D) 65 E) 53

Nivel III

- ¿Cuál es la diferencia entre el ángulo interno y externo de un polígono regular, sabiendo que el número de diagonales excede en 8 al número de ángulos rectos al cual equivale la suma de los ángulos internos?
A) 45° B) 30° C) 60°
D) 90° E) 75°



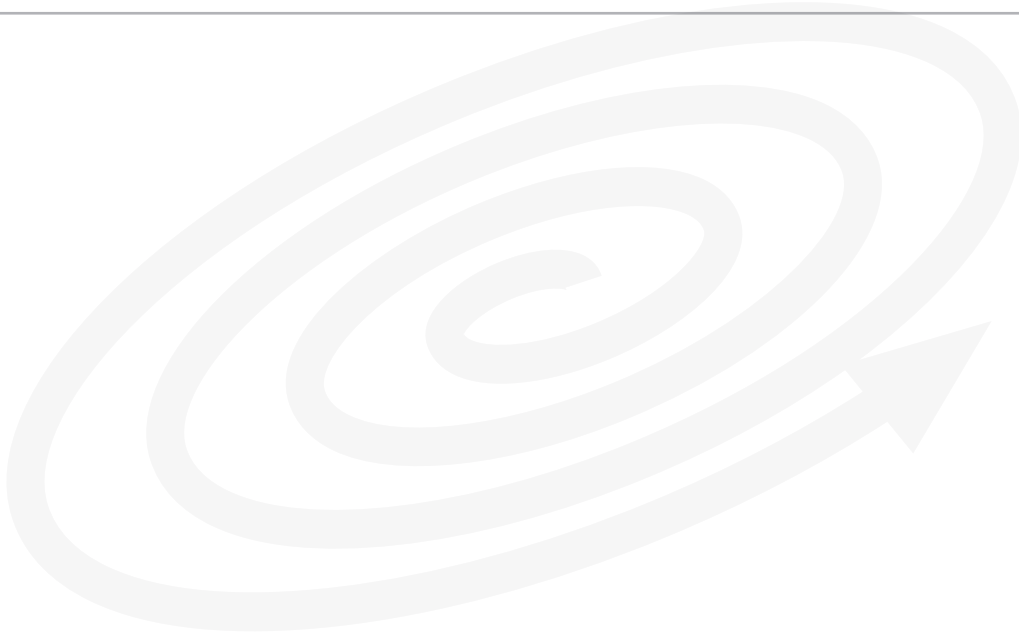
Helicodesafío

- Dos polígonos regulares P_1 y P_2 tienen en común a los vértices B y D, el vértice C de P_1 está en el interior de P_2 , los vértices M y N de P_2 están en el interior de P_1 , determinándose el polígono convexo BCDNM del cual las medidas de los ángulos B y D suman 117° . Si el número de lados de P_2 excede en dos al número de lados de P_1 , entonces la suma de los números de lados de dichos polígonos es
A) 8. B) 10. C) 14.
D) 16. E) 18.
- En un hexágono equiángulo convexo, 2 lados opuestos tienen igual longitud, se ubica el punto M en el interior, calcule la suma de las distancias de M a 3 lados no consecutivos si la suma de las distancias de dicho punto a los otros 3 lados es $3\sqrt{3}$ m.
A) 3 m B) 9 m C) 6 m
D) $3\sqrt{3}$ m E) $2\sqrt{3}$ m
- En el interior de un dodecágono regular ABCDEFGHIJKL, se traza el pentágono regular ACMNO. Halle la medida del menor ángulo determinado por $\overline{ON}$ y $\overline{EF}$.
A) 54° B) 60° C) 69°
D) 72° E) 75°
- Dado tres polígonos convexos equiángulos, cuyas medidas de sus ángulos exteriores respectivos están en progresión aritmética, si uno de ellos tiene 4 lados más que el segundo y este tiene 2 lados más que el tercero. ¿Cuál es el número de lados del segundo polígono?
A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12
- Se tiene el polígono regular ABCDEF... y el polígono equiángulo ACE... de tal manera que sus respectivos ángulos interiores son suplementarios. ¿Cómo se llama el primer polígono?
A) Cuadrilátero B) Hexágono
C) Pentágono D) Octógono
E) Decágono

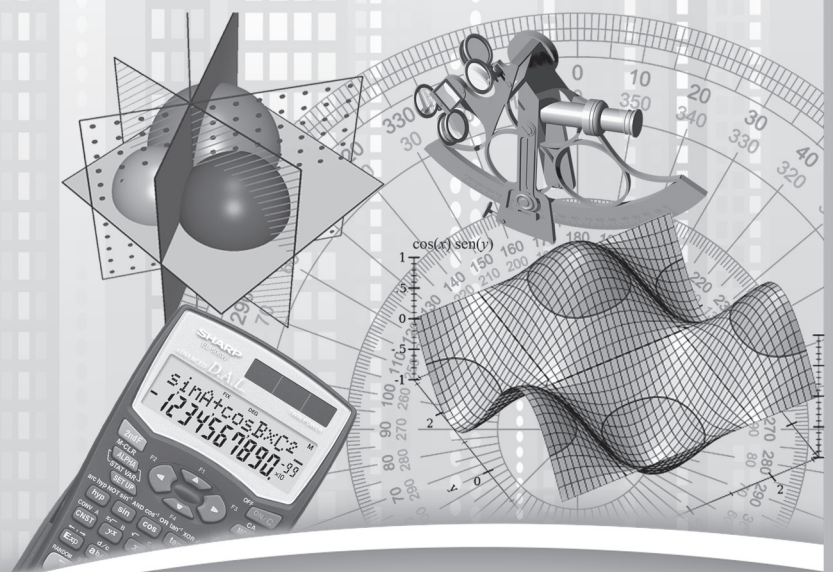


Bibliografía y cibergrafía

- VEGA, F. *Matemática moderna 4*. Editorial Colegio Militar Leoncio Prado. Lima-Perú, 1961.
- MOISE, E. *Elementary geometry*. Primera edición. Editorial Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1964.
- HELFGOTT, M. *Geometría plana*. Editorial Escuela Activa S. A. Lima-Perú, 1992.
- Triángulos
 - <https://www.youtube.com/watch?v=T6y6f42Q938>
 - <https://www.youtube.com/watch?v=doqf3bmoUzQ>
- Congruencia de triángulos
 - https://www.youtube.com/watch?v=2m9X3D_5Gbg
 - <https://www.youtube.com/watch?v=EhQa4fxBEd4>
- Notables
 - <https://www.youtube.com/watch?v=7C8SFiDr39E>
 - <https://www.youtube.com/watch?v=Vqtn4erKIUE>



TRIGONOMETRÍA



TRIGONOMETRÍA

LONGITUD DE ARCO - SECTOR CIRCULAR



Objetivos

- Reconoce la longitud de un arco y radio.
- Reconoce las diferentes relaciones de áreas y su aplicación.



Sabías que...

Longitud de una órbita

Un sistema de telemetría desea hallar la distancia que separa (sobre la órbita geoestacionaria) a dos satélites geoestacionarios Arabsat-1A (localizado a $19,2^\circ$ este) e Intelsat V-F4 (localizado a $34,4^\circ$ oeste) sabiendo que la distancia de la superficie de la Tierra a un satélite geoestacionario es aproximadamente 35 800 km, considere que el radio de la Tierra es aproximadamente 6400 km.

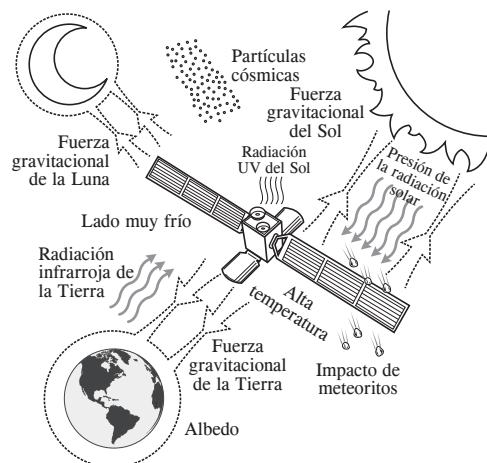
¿Podría usted decir qué distancia halló el sistema de telemetría?

Haciendo uso de una relación trigonométrica sencilla podemos concluir que dicha distancia es 39 477,92 km. Invitamos al estudiante a que nos acompañe en el desarrollo teórico para hallar la mencionada relación trigonométrica, la cual se explica en las páginas siguientes, pero antes de eso le hacemos llegar un alcance más.

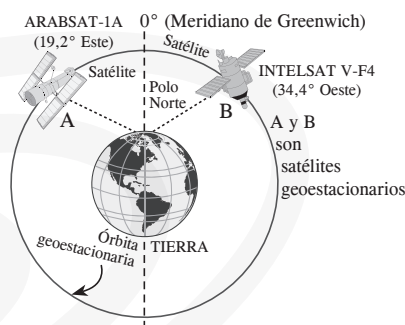
El sistema Intelsat (Organización Internacional de Telecomunicaciones por Satélite) fue creado en 1964 y actualmente interconecta a 165 países, territorios y dependencias en todo el mundo. Es utilizado principalmente para las comunicaciones internas, al no contar con satélites domésticos propios.

Arabsat (Arab Satellite Communications Organization) es una organización de la Liga de Países Árabes fundada en 1976 cuya función primordial es adquirir los satélites

necesarios y las facilidades de su lanzamiento y control, así como operarlos para la prestación de servicios de comunicaciones a sus 22 países participantes. El Arabsat-1A fue lanzado en febrero de 1985.



Una estación geoestacionaria es en primer lugar un satélite que debe desplazarse en el mismo sentido de rotación que la Tierra; además para que no perdiese altura poco a poco y completase una vuelta cada 24 horas, debía estar aproximadamente a 36 000 km de altura sobre el nivel del mar; para lograrlo, el satélite debía tener una velocidad constante de 3075 m/s, siguiendo una órbita circular alrededor de la Tierra.

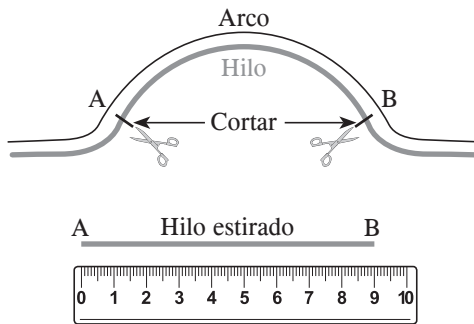




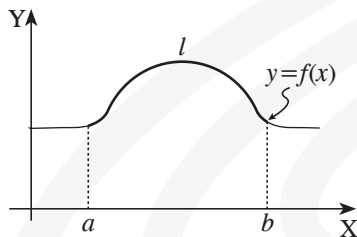
Helicoteoría

LONGITUD DE ARCO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Si se pidiese medir manualmente la longitud de un arco de curva como en la figura mostrada, una forma de realizar aquello sería que adapte un hilo a su forma y luego se mida con una regla. Veamos el siguiente gráfico:



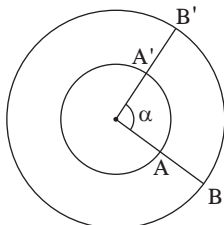
Sin embargo, matemáticamente se determina la longitud de un arco utilizando el cálculo integral. La longitud del arco de la figura que se muestra, de $y = f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$



se calcula por la fórmula

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

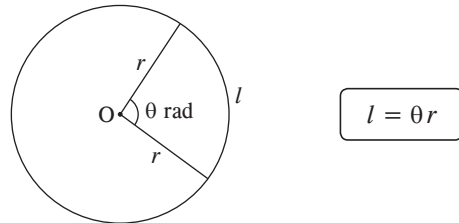
Los arcos de circunferencia se pueden medir en unidades angulares y en unidades de longitud, si consideramos un ángulo central α en circunferencias concéntricas, tal como se ve en la siguiente figura.



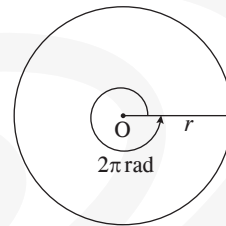
Las medidas de arcos en AA' y en BB' en unidades angulares son iguales a α . Pero la medida en unidades de longitud del arco AA' es menor que la del arco en BB'.

Cálculo de la longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia partimos de la definición que expresa la medida circular de un ángulo central como $\theta = \frac{l}{r}$, de donde se obtiene que



De esta fórmula, nótese que θ rad puede ser cualquier ángulo positivo menor o igual a una vuelta. ($0 < \theta \leq 2\pi$)



Para $\theta = 2\pi$, la fórmula anterior nos da la longitud de la circunferencia $l = 2\pi r$.

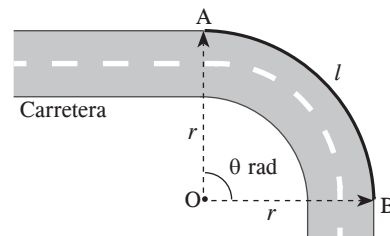
Ejemplo 1

Una carretera tiene una curva de 20° , con un radio de 630 pies. Determine la longitud de la curva.

(Considere $\pi = \frac{22}{7}$).

Resolución

De la figura



$$m\angle AOB = 20^\circ = \frac{\pi \text{ rad}}{9} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{9} \text{ (en radianes)}$$

Por fórmula

$$l = \theta r \rightarrow l = \frac{\pi}{9} \times 630$$

$$l = 70\pi = 70 \times \frac{22}{7} = 220$$

$\therefore$ La longitud de la curva es de 220 pies.

Ejemplo 2

El péndulo de un reloj tiene 20 cm de longitud y recorre un arco de 25° por segundo. ¿Cuántos centímetros recorre la punta del péndulo en un segundo? (Considere $\pi = 3,14$)

Resolución

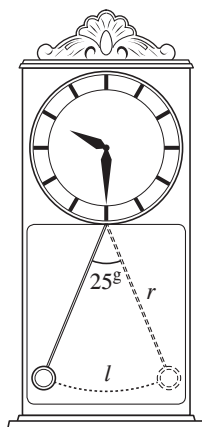
Datos

$$r = 20 \text{ cm}$$

$$\theta = 25^\circ \text{ (en grados centesimales)}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \text{ (en radianes)}$$

En la figura



l representa la longitud recorrida por la punta del péndulo en un segundo.

$$\text{Así, por fórmula, } l = \theta r \rightarrow l = \frac{\pi}{8} \times 20 \text{ cm}$$

$$\therefore l = \frac{5\pi}{2} \text{ cm}$$

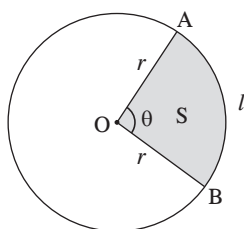
Considerando $\pi = 3,14$ se tiene que $l = 7,85 \text{ cm}$.

CÁLCULO DEL ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

Un sector circular es una porción de círculo tal como AOB limitada por los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y el arco AB. Así, el área sombreada del sector AOB se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$S = \frac{1}{2} \theta r^2$$

θ en radianes

**Deducción**

El área de un círculo de radio r es πr^2 . Como S y θ son directamente proporcionales, entonces el área del círculo con el ángulo de una vuelta también lo serán, siendo r constante, así

$$\frac{S}{\theta} = \frac{\text{Área del círculo}}{2\pi}$$

$$\frac{S}{\theta} = \frac{\pi r^2}{2\pi}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \theta r^2$$

Además como $l = \theta r$, expresando S en función de:

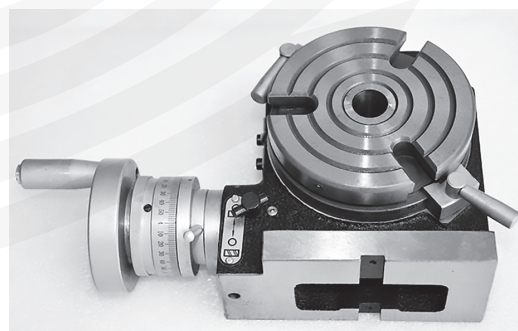
- Longitud del arco y el radio

$$S = \frac{lr}{2}$$

- Longitud de arco y el ángulo central

$$S = \frac{l^2}{2\theta}$$

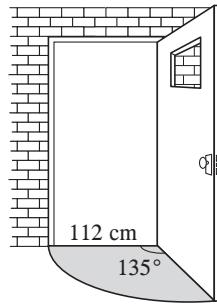
Los términos círculo y área de sector circular son frecuentes en elementos de máquina. En la figura se observa una mesa divisora circular que en un torno determina el avance y la velocidad de corte.

**Ejemplo 1**

Calcule el área de la región que determina el borde inferior de una puerta de vaivén al girar un ángulo de 135° sabiendo que dicho borde mide 112 cm. (Considere $\pi = 3,14$)

Resolución

En la figura se ha graficado la puerta en giro.



Datos del sector circular

$$r = 112 \text{ cm}$$

$$\theta \text{ rad} = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Aplicando la fórmula

$$S = \frac{1}{2} \theta r^2$$

Sustituyendo datos

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} \right) (112)^2$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{3 \times 3,14}{4} \right) (112)^2$$

$$\text{Efectuando: } S = 14\,770,56 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 2

Expresa el área de un trapezio circular en función de la longitud de sus áreas y el ángulo central.

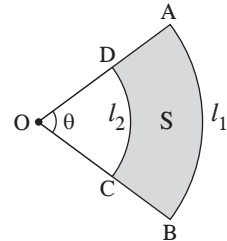
Resolución

Considerando θ , en radianes, como el ángulo central de los arcos l_1 y l_2 , (ver figura) tenemos

$$S = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle DOC}$$

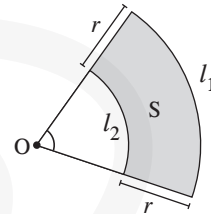
$$S = \frac{l_1^2}{2\theta} - \frac{l_2^2}{2\theta}$$

$$S = \frac{l_1^2 - l_2^2}{2\theta}$$



Se deja como ejercicio, la demostración del área de un trapezio en función de sus lados. De la figura se cumple

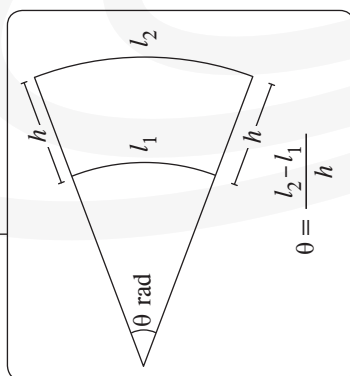
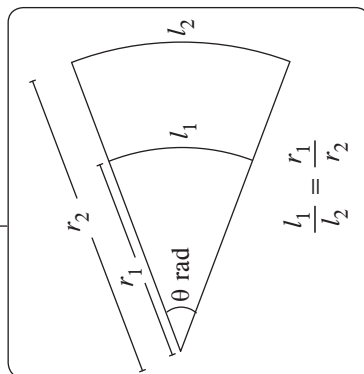
$$S = \left(\frac{l_1 + l_2}{2} \right) r$$



SECTOR CIRCULAR

Longitud de arco

$$l = \theta r$$

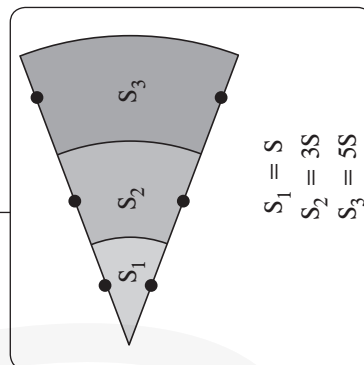
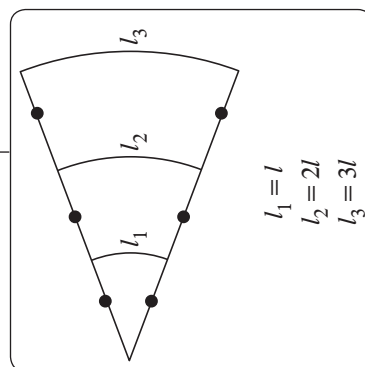
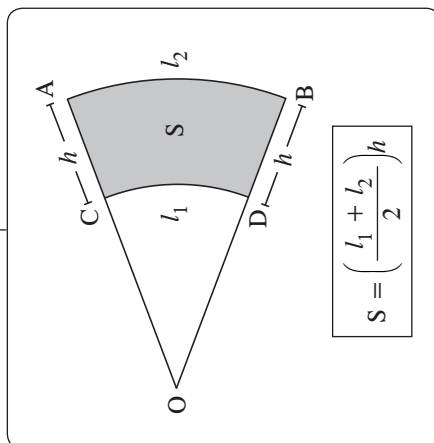
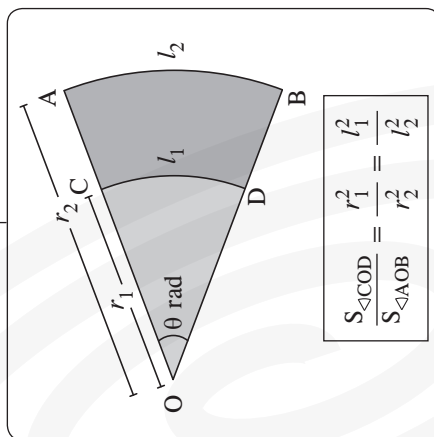


Área del sector circular

$$S = \frac{\theta r^2}{2}$$

$$S = \frac{rl}{2}$$

$$S = \frac{l^2}{2\theta}$$

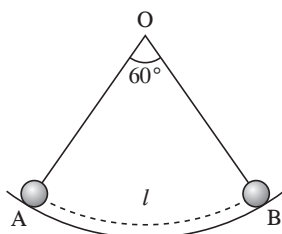


Helicósinthesis



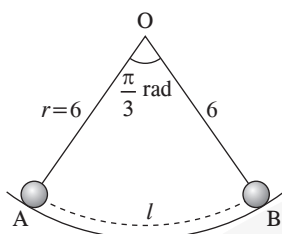
Problemas resueltos

1. Halle el número de vueltas que da una rueda de radio $r = 0,5$ cm, al rodar (sin resbalar) en un arco circular $\widehat{AB}$ de radio $r = 6$ cm y ángulo central 60° . (UNI 2014 - II)



Resolución

Según los datos



Considere que

$$l = \theta r$$

$$l = \frac{\pi}{3}(6)$$

$$l = 2\pi$$

Calculando el número de vueltas

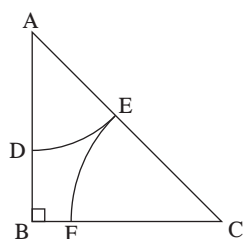
$$n_v = \frac{l}{2\pi r}$$

$$n_v = \frac{2\pi}{2\pi(0,5)}$$

$$n_v = 2$$

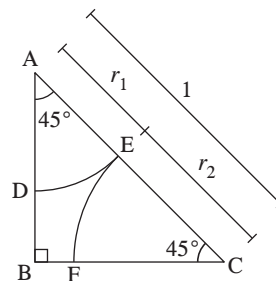
Rpta.: 2

2. La figura adjunta representa sectores circulares en el triángulo rectángulo isósceles ABC. Calcule, en cm, la suma de las longitudes de los arcos $\widehat{DE}$ y $\widehat{EF}$ si $AC = 1$ cm. (UNI 2015 - I)



Resolución

Según los datos



$$\text{Del gráfico } l_{\widehat{ED}} = \theta r_1 = \frac{\pi}{4} r_1$$

$$l_{\widehat{EF}} = \theta r_2 = \frac{\pi}{4} r_2$$

Nos piden

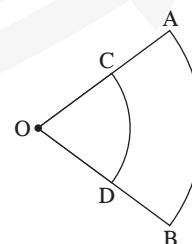
$$l_{\widehat{ED}} + l_{\widehat{EF}} = \frac{\pi}{4} r_1 + \frac{\pi}{4} r_2$$

$$l_{\widehat{ED}} + l_{\widehat{EF}} = \frac{\pi}{4} (r_1 + r_2) = \frac{\pi}{4} (1)$$

$$\therefore l_{\widehat{ED}} + l_{\widehat{EF}} = \frac{\pi}{4}$$

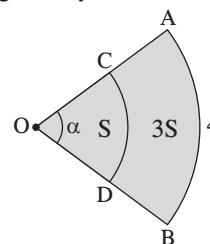
Rpta.: $\frac{\pi}{4}$

3. De la figura, AOB y COD son sectores circulares. Si las áreas de las regiones COD y CABD son S y $3S$ u², respectivamente, y $l_{\widehat{AB}} = 4$ u, determine la longitud del lado $\overline{OC}$ en función de S . (UNI 2015 - II)



Resolución

Nos piden la medida del lado $\overline{OC}$ en función de S . Analizando el gráfico y los datos tenemos



1.º En el sector COD

$$S = \frac{1}{2} \alpha r^2$$

$$2S = \alpha r^2 \quad \dots(1)$$

2.º En el sector AOB

$$4S = \frac{16}{2\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2}{S} \quad \dots(2)$$

Luego, reemplazando (2) en (1)

$$2S = \frac{2}{S} \cdot r^2$$

$$r^2 = S^2$$

$$r = S$$

Por lo tanto, el lado OC es S.

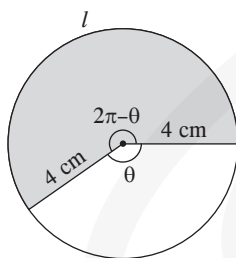
Rpta.: S

4. De un disco de cartulina de radio $R = 4$ cm, se corta un sector circular de ángulo central θ . Con la parte restante del disco, uniendo los bordes cortados se forma un cono. Si el ángulo en el vértice del cono construido mide 60° , ¿cuánto mide el ángulo θ ? (UNI 2016-I)

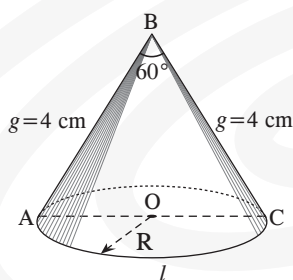
Resolución

Nos piden la medida del ángulo θ .

Del enunciado



$$l = (2\pi - \theta)4$$



ΔABC : equilátero

$$2R = g = 4 \text{ cm}$$

$$R = 2$$

De los gráficos tenemos

$$l = 4(2\pi - \theta) = 2\pi R$$

Al reemplazar: $R = 2$, tenemos

$$\therefore \theta = \pi \text{ rad} < > 180^\circ$$

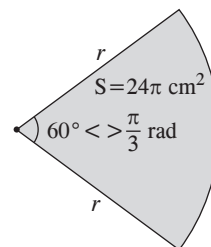
Rpta.: 180°

5. El área de un sector circular cuyo ángulo central mide 60° es de $24\pi \text{ cm}^2$. Si triplicamos el radio de dicho sector y disminuimos β radianes a su ángulo central, el área del nuevo sector disminuye un cuarto del anterior. ¿Cuál es el valor, en radianes, de β ? (UNI 2016-II)

Resolución

Del enunciado

Caso 1



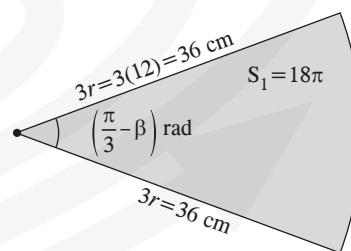
Dato

$$S = 24\pi$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot r^2 = 24\pi$$

$$r = 12 \text{ cm}$$

Caso 2



Dato

$$S = 18\pi$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \beta \right) (36)^2 = 18\pi \rightarrow \frac{\pi}{3} - \beta = \frac{\pi}{36}$$

$$\therefore \beta = \frac{11\pi}{36}$$

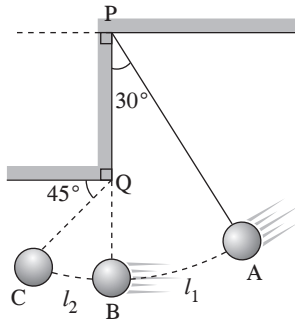
Rpta.: $\frac{11\pi}{36}$



Helicopráctica

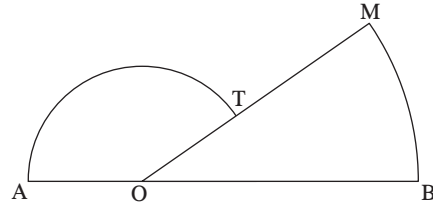
Nivel I

- La bolita se deja caer a partir del punto A y recorre las longitudes de arco l_1 y l_2 hasta llegar al punto C. Determine $\overline{PA}$, si $l_1 + l_2 = \frac{4\pi}{3}$ u y $\overline{PQ} = 6$ u.



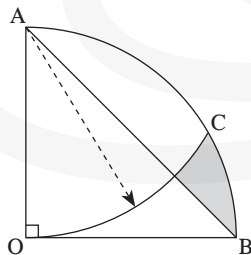
Resolución

- En la figura, el área del sector circular AOT es igual al área del sector circular MOB. Si $OA = \frac{OB}{2}$, halle la medida del ángulo BOT.



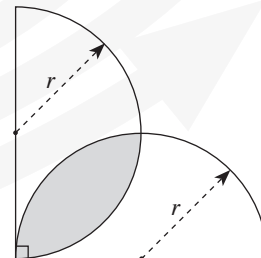
Resolución

- Calcule el perímetro de la región sombreada si AOB es un sector circular de radio $r = 2$ u.



Resolución

- En el gráfico se muestran dos semicircunferencias. Calcule el área de la región sombreada.

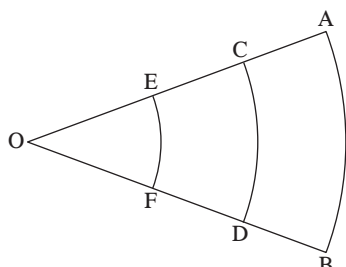


Resolución

Nivel II

5. Si AOB, COD y EOF son sectores circulares, en los cuales se cumple que $AC = CE$, calcule

$$\frac{l_{\widehat{EF}} + l_{\widehat{AB}}}{l_{\widehat{CD}}}$$

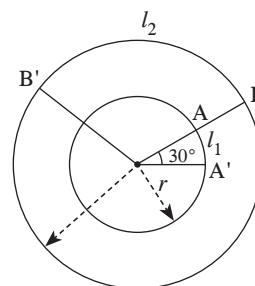


Resolución

7. En el gráfico, $l_1 + l_2 = \frac{5\pi}{6}r$, determine $l_2 - l_1$. Considere que

l_1 : longitud del arco $\widehat{AA'}$

l_2 : longitud del arco $\widehat{BB'}$

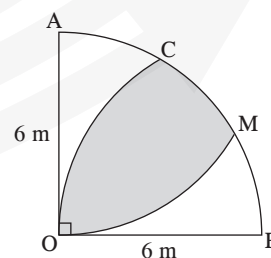


Resolución

6. Dado un sector circular de área 80 cm^2 , se aumenta su radio en 20 % y se disminuye en su longitud de arco en 50 %. Calcule el área de este nuevo sector circular.

Resolución

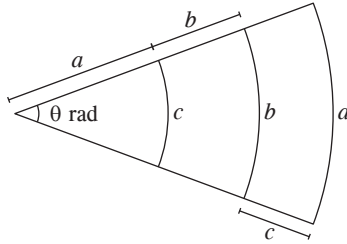
8. Calcule el perímetro de la región sombreada si A y B son centros de los sectores circulares OAM y OBC, respectivamente.



Resolución

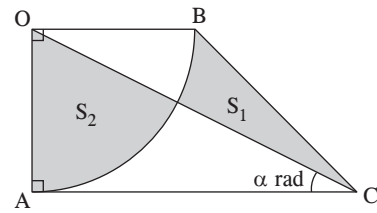
Nivel III

9. Según el gráfico, se observan tres sectores circulares. Calcule $(\theta^2 - 2)(\theta - 1)$.



Resolución

11. Si AOB es un sector circular, además $13S_1 = 7S_2$, halle el valor de α . $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

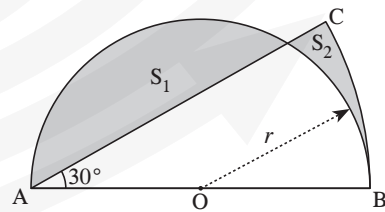


Resolución

10. Se tiene un sector circular de radio r y un ángulo central θ rad. Halle el valor de r y θ si el área es fija e igual a M , y el perímetro es mínimo.

Resolución

12. Si CAB es un sector circular, calcule $S_1 - S_2$.



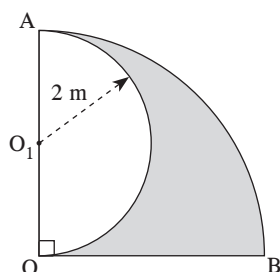
Resolución



Helicotaller

Nivel I

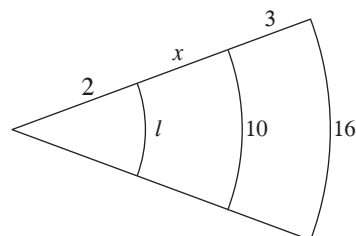
- Si AOB es un sector circular, calcule el perímetro de la región sombreada.



Resolución

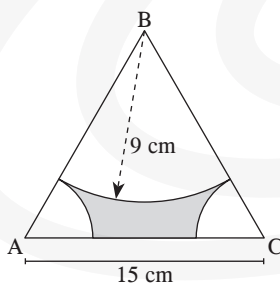
- En el gráfico, se observan tres sectores circulares. Calcule

$$\frac{2x + l}{2l - x}$$



Resolución

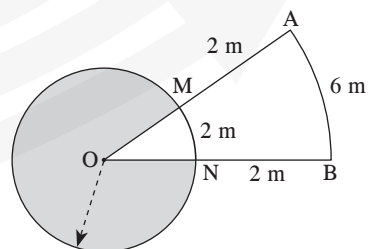
- Si ABC es un triángulo equilátero, calcule el perímetro de la región sombreada.



Resolución

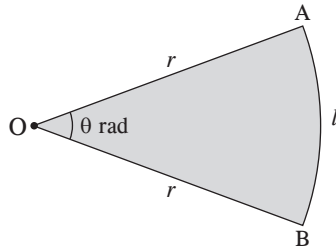
Nivel II

- Si AOB es un sector circular, calcule el área de la región sombreada.



Resolución

5. Calcule el área del sector circular AOB si se cumple que $r\theta(r\theta - l) + l(2r\theta + l) = 24\theta$.



Resolución

Nivel III

7. Calcule la longitud del radio de un sector circular de perímetro 28 m, de tal manera que su área sea máxima.

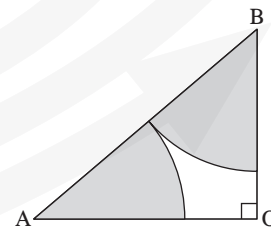
Resolución

6. En el gráfico mostrado, la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es igual a 8 m, y la región sombreada es un cuadrado cuyo lado mide 2 m. Si se gira en el sentido indicado hasta envolver toda la cuerda en el cuadrado, calcule la longitud que recorre el extremo A.



Resolución

8. En la figura mostrada, las regiones sombreadas son sectores circulares. Calcule el área mínima de la región sombreada si $AO = OB = r$.



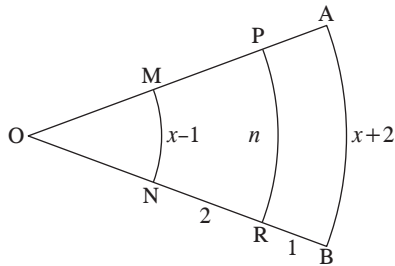
Resolución



Test 1

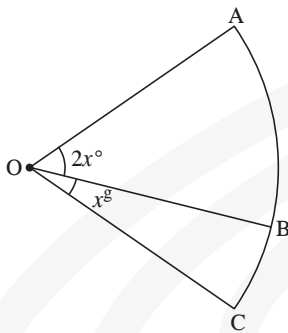
Nivel I

1. Si AOB, MON y POR son sectores circulares, calcule $n - x$.



- A) 2 B) 1 C) -1
D) $\frac{1}{2}$ E) -2

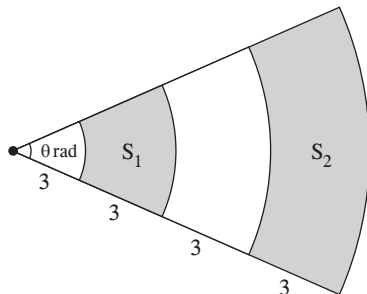
2. Si AOB es un sector circular y $l_{\widehat{BC}} = 9\pi$ cm, halle $l_{\widehat{AB}}$.



- A) 18π cm B) 24π cm C) 16π cm
D) 20π cm E) 10π cm

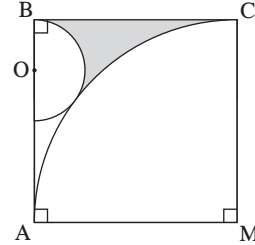
Nivel II

3. De acuerdo con el gráfico, se observan cuatro sectores circulares. Si $S_1 + S_2 = 15\pi$, halle el valor de θ .



- A) $\frac{\pi}{15}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

4. Calcule, aproximadamente, el perímetro de la región sombreada si M y O son centros, además, $MA = MC = 4$.



- A) $\frac{97\pi}{60} + 4$ B) $\frac{113\pi}{30} + 4$ C) $\frac{113\pi}{60} + 4$
D) $\frac{113\pi}{160} + 4$ E) $\pi + 4$

Nivel III

5. Si el perímetro de un sector circular es 40 cm, calcule su área máxima.

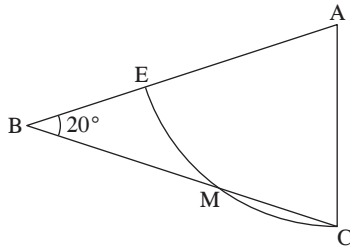
- A) 50 cm^2 B) 80 cm^2 C) 100 cm^2
D) 120 cm^2 E) 140 cm^2



Test 2

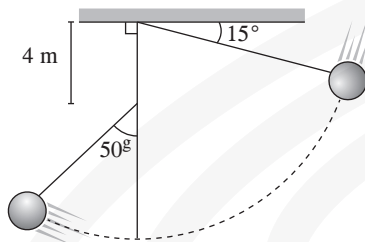
Nivel I

1. Si CAE es un sector circular y $AB = BC$, calcule $\frac{l_{\widehat{EM}}}{l_{\widehat{MC}}}$.



- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

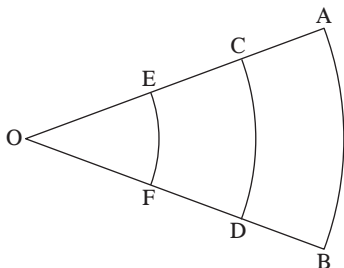
2. Un péndulo se mueve como indica el gráfico. Calcule la longitud del péndulo si su extremo recorre 3π m.



- A) 5 m B) 6 m C) 7 m
D) 8 m E) 9 m

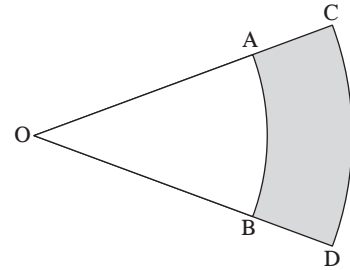
Nivel II

3. Se muestra a AOB, COD y EOF, sectores circulares, cuyas áreas son numéricamente iguales a $6S$, $3S$ y S . Calcule $\frac{l_{\widehat{EF}}}{l_{\widehat{AB}}}$.



- A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

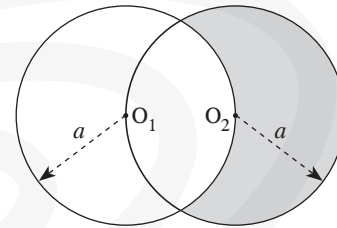
4. El punto O es el centro de los sectores circulares AOB y COD. Si $l_{\widehat{AB}} = 2u$ y $l_{\widehat{CD}} = 4u$ y $OA = 3u$; calcule el perímetro de la región sombreada.



- A) 12 u B) 14 u C) 16 u
D) 18 u E) 20 u

Nivel III

5. Calcule el área de la región sombreada.

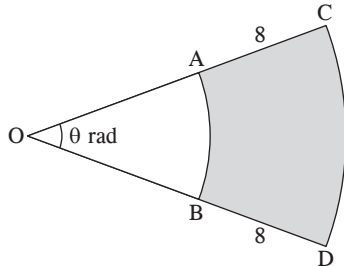


- A) $\frac{\pi}{3}a^2$ B) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$
C) $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$ D) $\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2$
E) $\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)a^2$



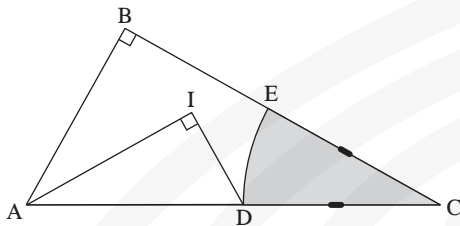
Helicodesafío

1. En la figura mostrada, calcule el área del trapecio circular sabiendo que θ asume el menor valor posible y, además, las longitudes de los arcos AB y CD son $(3 - x^{-1})\pi$ u y $(x + 5)\pi$ u, respectivamente.



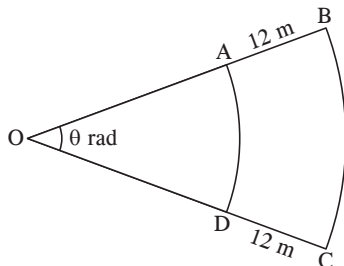
- A) $12\pi u^2$ B) $22\pi u^2$ C) $32\pi u^2$
D) $42\pi u^2$ E) $52\pi u^2$

2. De la figura, calcule el área de la región sombreada, siendo I incentro del triángulo ABC, además, $AD = DC$ y $AB = 3,6$ u.



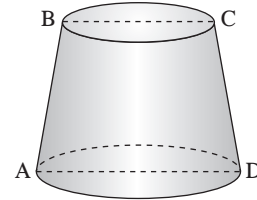
- A) $\frac{53\pi}{10} u^2$ B) $\frac{53\pi}{2} u^2$
C) $\left(37 + \frac{\pi}{10}\right) u^2$ D) $\frac{37\pi}{40} u^2$
E) $\frac{37\pi}{2} u^2$

3. Según la figura, con el trapecio circular ABCD se forma un tronco de cono, cuyas áreas de sus bases son $4\pi m^2$ y $9\pi m^2$. Halle el valor de θ .



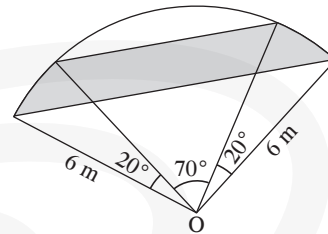
- A) $\frac{\pi}{9}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{4}$

4. Calcule el área máxima de la superficie lateral de un tronco de cono si $AB + BC + CD + AD = p$.



- A) $\frac{\pi}{2} p^2$ B) $\frac{\pi}{16} p^2$ C) $\frac{\pi}{8} p^2$
D) $\frac{\pi}{6} p^2$ E) πp^2

5. Calcule el área de la región sombreada en los sectores circulares mostrados.



- A) $3\pi u^2$ B) $4\pi u^2$ C) $5\pi u^2$
D) $6\pi u^2$ E) $7\pi u^2$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS Y NOTABLES



Objetivos

- Reconoce y aplica correctamente las razones trigonométricas en los diversos problemas presentados.
- Identifica los triángulos rectángulos notables por medio de sus ángulos y/o lados, lo cual permitirá el fácil desarrollo de los problemas propuestos.

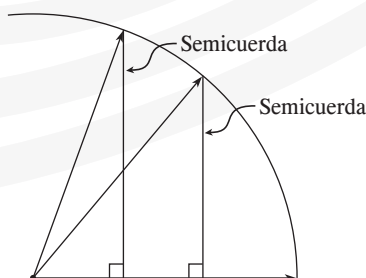


Sabías que...

Surgimiento de los términos seno y tangente

Origen del término seno

Por el año 500 d. C., los matemáticos de la India empezaron a considerar el movimiento de una recta que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de un punto fijo, y a medir las longitudes de las semicuerdas o perpendiculares trazadas desde el extremo de la recta (en diversas posiciones de su movimiento) a la posición inicial de ella (véase la siguiente figura). Esa recta se conoce hoy en día como radio vector o “radio movimiento” (del latín *vector*, “portador”, de *vehor*, “muevo”; compárese con “vehículo”).



Por esta razón, la longitud de la semicuerda se asoció a un ángulo, el ángulo determinado por el giro de la recta.

Los indios dieron el nombre de *jva* a dicha semicuerda, nombre que en hindú significa cuerda. La palabra pasó al árabe como *jiba* y más tarde se confundió con la palabra árabe *jaib* debido probablemente a que las palabras en árabe se escribían frecuentemente sin vocales y por ser iguales las consonantes de ambas *jiba* y *jaib*, es decir *jb*. Sin embargo, la palabra *jaib* no tiene relación alguna con la longitud de la semicuerda ya que significa la abertura en el cuello de una prenda de vestir. Pese a ello, los árabes tomaron la costumbre de designar a la semicuerda por medio de dicha palabra *jaib* sin sentido, que hacía referencia a un “doblez” o “curva”. Por ese tiempo, los matemáticos europeos se familiarizaron con la palabra árabe referente a semicuerda y tradujeron *jaib* por la palabra *sinus* que significa “doblez” o “curva”.



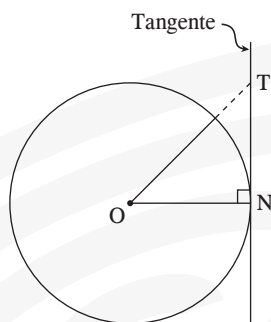
Dicho error se ha perpetuado en nuestra palabra *seno*. Así pues, originalmente el seno de un ángulo representaba la longitud de la semicuerda de una circunferencia de un radio 1. En nuestros días, como pronto veremos, cuando hablamos del seno de un ángulo, no hablamos de una longitud.

Origen del término *tangente*

Como se ha visto, en la mente de los antiguos ya existía la idea de la relación entre la altura de un poste y la longitud de su sombra. Para medir el paso del tiempo inventaron el reloj de sol de dos tipos: uno con la varilla vertical de modo que su sombra se proyectara sobre una superficie horizontal; el otro tipo con su varilla inclinada y sujeta a una pared vertical, de modo que su sombra se proyectaba sobre la pared.

No obstante que la relación existente entre la altura de un poste y su sombra se estudió desde los tiempos más remotos, no fue sino hasta el siglo X d. C. cuando los árabes empezaron a estudiar longitudes análogas relacionadas con el radio de una circunferencia.

Tuvieron que pasar otros cinco siglos para que la palabra *tangente* se le asignara a una recta tal como la indicada por $\overline{TN}$ en la siguiente figura. La tangente a una circunferencia es la recta que la toca en un solo punto (del latín: *tango*, “toco”). Una mejor definición que abarca otras curvas, además de la circunferencia, es: “Una tangente es la posición límite de una secante”. Sin embargo, como aquí solo estamos considerando tangentes a circunferencias, por el momento será suficiente la primera definición.



Supongamos que $\overline{TN}$ es parte de la tangente a la circunferencia; $\overline{ON}$ es el radio y $\overline{OT}$ es la prolongación de una recta en movimiento o radio vector. En el siglo XVI, los matemáticos empezaron a designar a $\overline{TN}$ como la *tangente del ángulo TON*.



Helicoteoría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Introducción

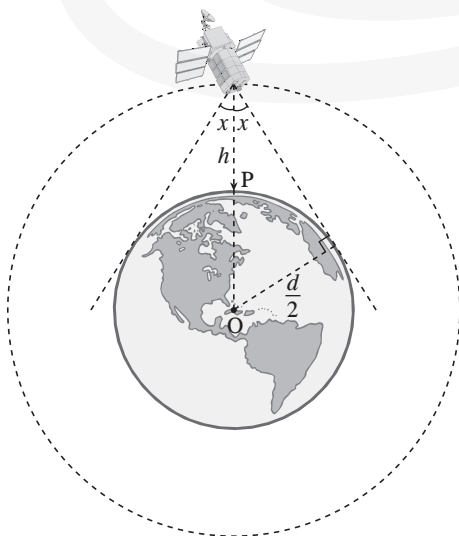
En la construcción de carreteras, puentes, canales y edificaciones, observamos que los topógrafos manipulan instrumentos como el teodolito, el metro y las reglas graduadas con el objeto de medir ángulos y distancias generalmente en triángulos, ya que la triangulación es muy empleada para trabajos de topografía que son indispensables en la preparación y ejecución de proyectos de ingeniería.

En el presente capítulo analizaremos los triángulos rectángulos. Las propiedades que se exponen tendrán su utilidad en los ejercicios de ángulos verticales y horizontales. Como una de las aplicaciones, podemos indicar el cálculo del diámetro de la Tierra y la distancia del Sol a la Tierra. Además se sabe que, en sus inicios, la trigonometría se basa en la astronomía que en la antigüedad desarrolla Hiparco y que, posteriormente, Galileo Galilei utiliza para analizar el desplazamiento de los planetas.

Al calcular la medida del diámetro de la Tierra desde un satélite se observa que la bisectriz del ángulo así determinada señala al centro de la Tierra (El punto P se halla en la superficie).

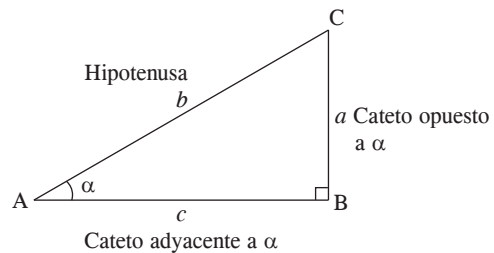
El uso de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo generado nos permite obtener

$$d = \frac{2h}{\csc x - 1}$$



Calcular el diámetro de la Tierra ha sido un afán del hombre desde tiempos remotos. Los sofisticados instrumentos actuales permiten que dicho cálculo sea exacto.

Consideremos un triángulo ABC, tomando a B como vértice del ángulo recto y dos ángulos agudos en A y C. Designando α al ángulo cuyo vértice es A, así tenemos que c es la longitud del lado adyacente a α , a es la longitud del lado opuesto a α y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto (90°), siendo su longitud b .

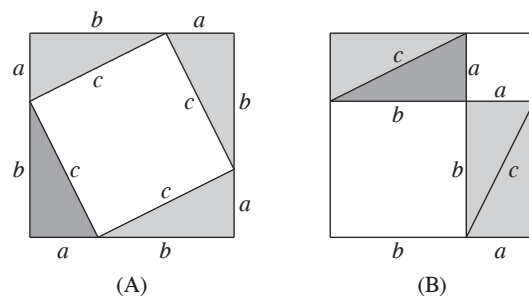


Es necesario resaltar algunas propiedades del triángulo rectángulo.

- La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos y menor que la suma de ellos.
- La suma de los ángulos agudos es 90° ; es decir, dichos ángulos son complementarios ($A + C = 90^\circ$).
- Al mayor ángulo se opone el mayor lado y así recíprocamente.
- El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

De la figura anterior, establecemos la relación $a^2 + c^2 = b^2$, llamado también *teorema de Pitágoras*.

La demostración de la escuela de Pitágoras puede muy bien haber sido la que ilustran las siguientes figuras:



Del cuadrado que tiene $a+b$ como lado, retiramos 4 triángulos iguales al dado. Si hacemos esto como en la figura de la izquierda, obtenemos un cuadrado de lado c . Pero si la misma operación se hace como en la figura de la derecha, quedarán dos cuadros, de áreas a^2 y b^2 , respectivamente, luego el área del cuadrado de lado c es la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados miden a y b .

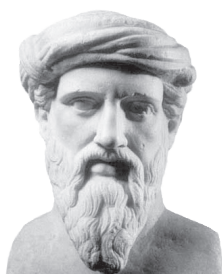


Pitágoras de Samos

Todo lo expuesto sobre Pitágoras está basado en una tradición persistente, pero no en un documento histórico conocido. Pitágoras fue una especie de profeta y de místico, nacido en Samos, una de las islas de Dodecaneso próximo a Mileto, la patria de Tales.

Alrededor del año 540 a.C., Pitágoras fundó una secta semirreligiosa, semimatemática en Cretona, ciudad griega en el sur de Italia. Junto con los matemáticos, inculcó a sus discípulos la veneración a los números (se dice que el lema de la escuela pitagórica era: "Todo es un número").

Entre las enseñanzas de Pitágoras que más se recuerdan están, naturalmente, el teorema que dice que en un triángulo rectángulo el cuadrado del lado más largo (la hipotenusa) es igual a la suma de cuadrados de los otros dos lados más cortos (los catetos). Los babilonios habían descubierto este teorema con mil años de anterioridad, pero se le atribuye a la escuela pitagórica por ser la primera en difundirlo.



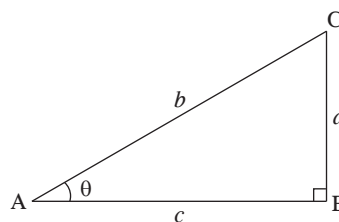
*Pitágoras
(Grecia, 580 a.C. -
500 a.C.)*

Definición de razón trigonométrica

Es el cociente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo respecto de uno de sus ángulos agudos. Es importante observar que las razones trigonométricas son cantidades numéricas o adimensionales (no poseen unidades). Entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se establecen 6 razones trigonométricas, a saber:

Sea θ un ángulo agudo de dicho triángulo rectángulo, entonces:

Nombre	Definición
Seno de theta	$\text{sen } \theta = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto de } \theta}{\text{Longitud de la hipotenusa}}$
Coseno de theta	$\text{cos } \theta = \frac{\text{Longitud del cateto adyacente de } \theta}{\text{Longitud de la hipotenusa}}$
Tangente de theta	$\text{tan } \theta = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto de } \theta}{\text{Longitud del cateto adyacente de } \theta}$
Cotangente de theta	$\text{cot } \theta = \frac{\text{Longitud del cateto adyacente de } \theta}{\text{Longitud del cateto opuesto de } \theta}$
Secante de theta	$\text{sec } \theta = \frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{Longitud del cateto adyacente de } \theta}$
Cosecante de theta	$\text{csc } \theta = \frac{\text{Longitud de la hipotenusa}}{\text{Longitud del cateto opuesto de } \theta}$



Aplicando la definición en la figura anterior, tenemos

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{b}, \quad \text{csc } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{b}, \quad \text{sec } \theta = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{a}{c}, \quad \text{cot } \theta = \frac{c}{a}$$



Observación

Como en la figura anterior, la hipotenusa b es mayor que los catetos a y c , entonces el seno y el coseno de un ángulo agudo son menores que 1 pero mayores que cero, así

$$0 < \text{sen } \theta < 1 \quad \text{y} \quad 0 < \text{cos } \theta < 1$$

Asimismo la secante y cosecante son mayores que 1

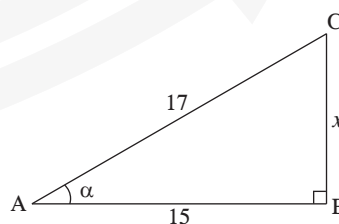
$$\text{sec } \theta > 1 \quad \text{y} \quad \text{csc } \theta > 1$$

Para las razones trigonométricas tangente y cotangente, un cateto puede ser mayor que el otro cateto o incluso iguales (caso que no se da entre un cateto y una hipotenusa), entonces

$$\text{tan } \theta > 0 \quad \text{y} \quad \text{cot } \theta > 0$$

Ejemplo

Emplee el triángulo rectángulo de la siguiente figura y obtenga las seis razones trigonométricas del ángulo α .



Resolución

En la figura dada, vemos que el tercer lado se calcula por el teorema de Pitágoras; así

$$x^2 + 15^2 = 17^2$$

$$x^2 = 17^2 - 15^2 = (17 - 15)(17 + 15)$$

$$x^2 = 64 \rightarrow x = 8$$

Luego tenemos: (Cateto opuesto de α) = 8

(Cateto adyacente de α) = 15

(Hipotenusa) = 17

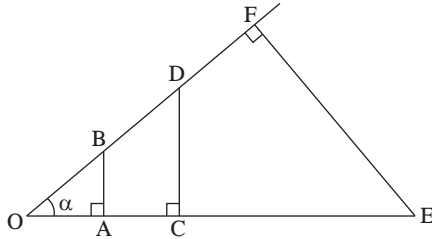
De donde se obtienen los siguientes valores

$$\text{sen } \alpha = \frac{8}{17}, \quad \text{cos } \alpha = \frac{15}{17}, \quad \text{tan } \alpha = \frac{8}{15}$$

$$\text{cot } \alpha = \frac{15}{8}, \quad \text{sec } \alpha = \frac{17}{15}, \quad \text{csc } \alpha = \frac{17}{8}$$

Propiedad fundamental de las razones trigonométricas

Como todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo de medida α son semejantes, los valores de las razones trigonométricas dependen únicamente de la amplitud del ángulo agudo, es decir, es independiente de las longitudes de los lados del triángulo.



En la figura anterior, se observa que los triángulos rectángulos OAB, ODC y OFE son semejantes, esto es

$$\triangle OAB \sim \triangle ODC \sim \triangle OFE$$

$$\rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OE} = \sin \alpha$$

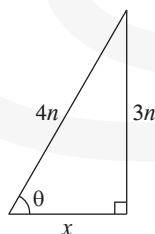
Ejemplo 1

Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es θ , donde $\sin \theta = \frac{3}{4}$. Calcule las razones trigonométricas restantes de θ .

Resolución

$$\text{Del dato: } \sin \theta = \frac{3}{4} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Considerando al cateto opuesto de θ como $3n$ se obtiene por hipotenusa $4n$, siendo n una constante de proporcionalidad, generamos el siguiente triángulo rectángulo



Cálculo de x

$$x^2 = (4n)^2 - (3n)^2$$

$$x^2 = 7n^2 \rightarrow x = \sqrt{7}n$$

Así por definición, tenemos

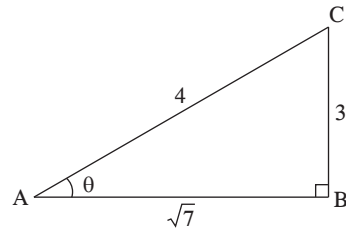
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}n}{4n} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \sec \theta = \frac{4n}{\sqrt{7}n} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\tan \theta = \frac{3n}{\sqrt{7}n} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{7}n}{3n} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{y } \csc \theta = \frac{4n}{3n} = \frac{4}{3}$$

Debe entender usted que encontrará diversas formas de resolver un problema y este ejemplo no es la excepción.

La forma práctica para resolver este ejemplo es asumiendo que la constante n sea 1, entonces



$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \sec \theta = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{y } \csc \theta = \frac{4}{3}$$

Se deja para el lector lo siguiente:

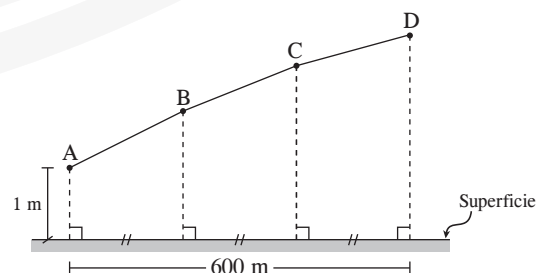
¿Cuál es el valor de $\sin \theta + \cos \theta$, siendo θ un ángulo agudo y $\tan \theta = 3$?

La respuesta de este ejercicio es $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

A continuación, veamos un ejemplo referido a un perfil de instalación para tuberías de desagüe.

Ejemplo 2

En la figura se muestra el perfil de la instalación de tuberías de desagüe. Si el buzón ubicado en A se encuentra a 1 m de la superficie, calcule la suma de las alturas a la que se encuentran los buzones instalados en B, C y D sabiendo que las pendientes de las tuberías $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son 3 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

**Resolución**

Según el enunciado se pide calcular la siguiente suma de longitudes: $h_B + h_C + h_D$, donde

h_B : Altura a la cual se encuentra ubicado el buzón B respecto de la superficie.

h_C : Altura a la cual se encuentra ubicado el buzón C respecto de la superficie.

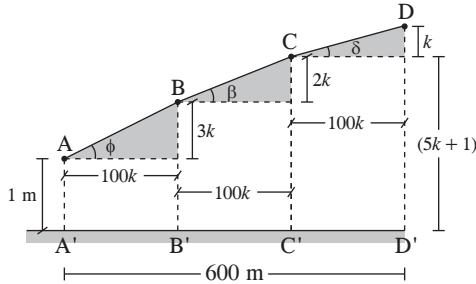
h_D : Altura a la cual se encuentra ubicado el buzón D respecto de la superficie.



Observación

La pendiente se define como el valor de $\tan \alpha$, donde α es el ángulo que hace una recta con la recta horizontal.

Es decir, para el primer tramo $\overline{AB}$ el enunciado indica que la pendiente es 3 %, por lo que a partir de ello se puede plantear lo siguiente:



$$\tan \phi = 3\% = \frac{3}{100} \rightarrow \tan \phi = \frac{3k}{100k} \dots (1)$$

k es una constante positiva.

Análogamente para los otros casos

Para el tramo $\overline{BC}$ la pendiente es 2 %, por lo que se puede plantear

$$\tan \beta = 2\% = \frac{2}{100} \rightarrow \tan \beta = \frac{2k}{100k} \dots (2)$$

Para el tramo $\overline{CD}$ la pendiente es 1 %, entonces

$$\tan \delta = 1\% = \frac{1}{100} \rightarrow \tan \delta = \frac{1k}{100k} \dots (3)$$

A partir de los datos mostrados en (1), (2), (3) y del enunciado, podemos entender la figura anterior, donde se señalan los ángulos de inclinación para cada una de las tuberías $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.

A partir del gráfico, podemos plantear

$$A'B' + B'C' + C'D' = 600 \text{ m}$$

$$100k + 100k + 100k = 600 \text{ m}$$

De donde resolviendo, obtenemos $k = 2 \text{ m}$

Pero según el gráfico

$$h_B = 3k + 1 \text{ y como } k = 2 \text{ m} \rightarrow h_B = 7 \text{ m} \dots (4)$$

$$h_C = 5k + 1 \text{ y como } k = 2 \text{ m} \rightarrow h_C = 11 \text{ m} \dots (5)$$

$$\text{y } h_D = 6k + 1 \text{ y como } k = 2 \text{ m} \rightarrow h_D = 13 \text{ m} \dots (6)$$

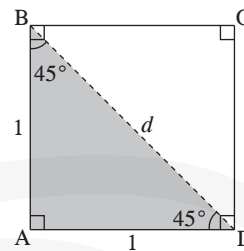
De las ecuaciones (4), (5) y (6) obtenemos

$$h_B + h_C + h_D = 7 \text{ m} + 11 \text{ m} + 13 \text{ m}$$

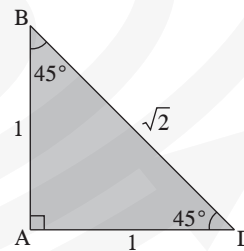
$$\therefore h_B + h_C + h_D = 31 \text{ m}$$

Razones trigonométricas de ángulos agudos (notables) en un triángulo rectángulo

Los ángulos que miden $30^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{6} \right)$, $45^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{4} \right)$ y $60^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{3} \right)$ son muy utilizados en trigonometría. Podemos calcular los valores de las seis razones trigonométricas de estos ángulos notables sin necesidad de utilizar tablas o calculadoras. Para encontrar los valores de las razones trigonométricas del ángulo de 45° , consideremos un cuadrado cuyo lado tiene una longitud 1, como muestra la siguiente figura. Si trazamos su diagonal tenemos que los ángulos agudos del triángulo rectángulo sombreado miden 45° . Con el teorema de Pitágoras podemos encontrar la longitud de la hipotenusa.



De la figura anterior: $d^2 = 1^2 + 1^2$, de tal manera que en la figura siguiente $d = \sqrt{2}$.



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

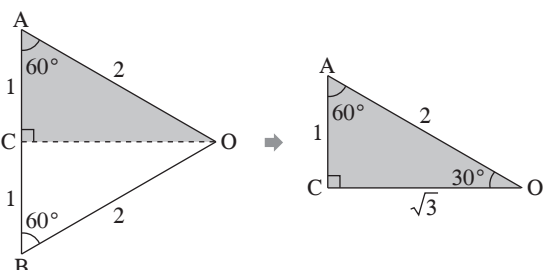
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Para encontrar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° ; consideramos un triángulo equilátero AOB cuyo lado tiene longitud 2 como lo muestra la siguiente figura.



Sabemos que los tres ángulos del triángulo equilátero miden 60° cada uno. Si hacemos una bisección del ángulo en O, entonces $\overline{CO}$ es la bisectriz perpendicular al lado $\overline{AB}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ACO (ver figura anterior) obtenemos

$$(CO)^2 + 1^2 = 2^2 \rightarrow (CO)^2 = 2^2 - 1^2$$

De tal manera que $CO = \sqrt{3}$, entonces de la figura anterior podemos obtener los siguientes valores:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ csc } 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ cot } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{tan } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \text{ cot } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

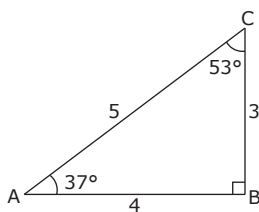
La siguiente tabla sintetiza los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos notables de 30° , 45° y 60° ; los cuales son utilizados con mucha frecuencia, siendo importante por ello su estudio.

θ (grados)	θ (radianes)	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tan } \theta$	$\text{cot } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{csc } \theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Observación

A menudo se utilizan triángulos rectángulos cuyos ángulos han sido aproximados. Así por ejemplo, en el triángulo rectángulo adjunto, de lados 3, 4 y 5, los ángulos A y C han sido aproximados a 37° y 53° , respectivamente, ya que estos ángulos medidos con transportador no coinciden exactamente con estas medidas.

En la figura mostrada, $\text{tan } A = \frac{3}{4}$ y haciendo uso de una calculadora científica tendremos que $A = 36^\circ 52' 11,63''$, logrando así una nueva exactitud.



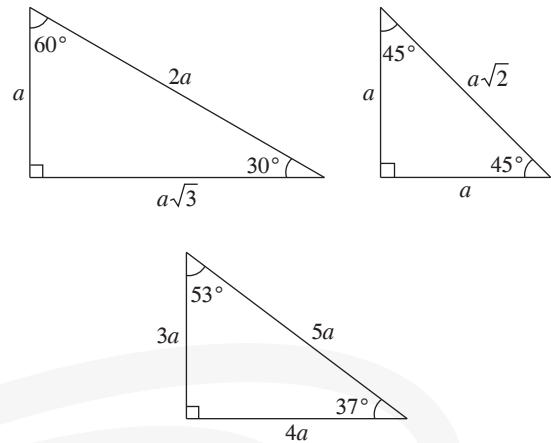
Así considerando la aproximación en la figura anterior, calculemos los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 37° y 53° , los cuales obviamente serán aproximados.

$$\text{sen } 37^\circ = \frac{3}{5} = \text{cos } 53^\circ, \text{ cos } 37^\circ = \frac{4}{5} = \text{sen } 53^\circ$$

$$\text{tan } 37^\circ = \frac{3}{4} = \text{cot } 53^\circ, \text{ cot } 37^\circ = \frac{4}{3} = \text{tan } 53^\circ$$

$$\text{sec } 37^\circ = \frac{5}{4} = \text{csc } 53^\circ, \text{ csc } 37^\circ = \frac{5}{3} = \text{sec } 53^\circ$$

Para un mejor uso de los triángulos rectángulos cuyos ángulos son notables, se hace la siguiente presentación:

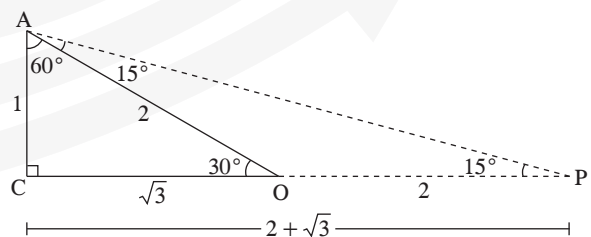


Ejemplo 1

Calcule $\text{tan } 15^\circ$ y $\text{cot } 15^\circ$.

Resolución

Graficamos el triángulo rectángulo notable de 30° y 60° . Prolongando el cateto $\overline{CO}$ hasta un punto P, tal que la longitud de $\overline{OP}$ sea igual a la longitud de la hipotenusa $\overline{AO}$. Luego se tiene que $m\angle APC = 15^\circ$.



Así en el triángulo rectángulo ACP planteamos

$$\text{tan } 15^\circ = \frac{AC}{CP} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

Multiplicando y dividiendo por $2 - \sqrt{3}$ tenemos

$$\text{tan } 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

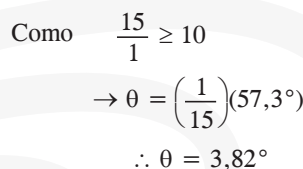
$$\therefore \text{tan } 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{cot } 15^\circ = \frac{CP}{AC} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1}$$

$$\therefore \text{cot } 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

Ejemplos

A right triangle is shown with a horizontal base of length 10. The angle at the bottom-left vertex is labeled α . The right angle is at the bottom-right vertex.

$$\begin{aligned} \text{Como } \frac{10}{1} &\geq 10 \\ \rightarrow \alpha &= \left(\frac{1}{10}\right)(57,3^\circ) \\ \therefore \alpha &= 5,73^\circ \end{aligned}$$


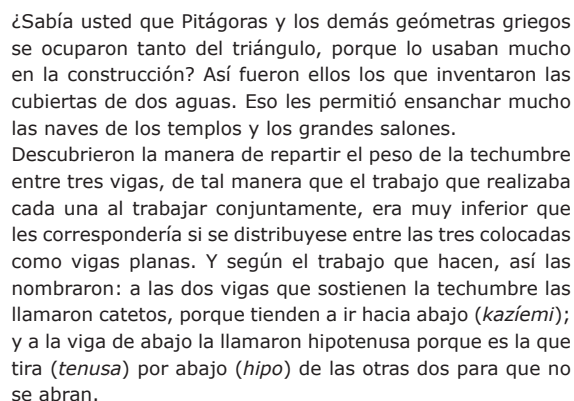
A right triangle is shown with a horizontal base of length 20. The angle at the bottom-left vertex is labeled β . The right angle is at the bottom-right vertex.

$$\begin{aligned} \text{Como } \frac{20}{1} &\geq 10 \\ \rightarrow \beta &= \left(\frac{1}{20}\right)(57,3^\circ) \\ \therefore \beta &= 2,865^\circ \end{aligned}$$

 **Observación**

 Anotación

Los catetos y la hipotenusa

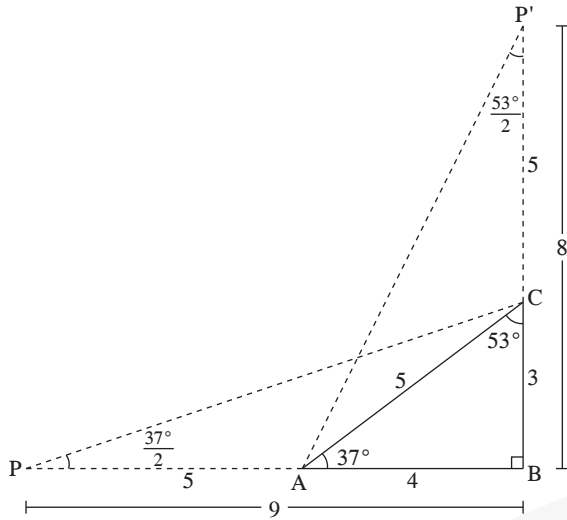

$$\alpha = \left(\frac{a}{b} \right) 57,3^\circ$$

Ejemplo 3

Calcule aproximadamente $\tan\left(\frac{37^\circ}{2}\right)$ y $\tan\left(\frac{53^\circ}{2}\right)$.

Resolución

Utilizamos el triángulo rectángulo ABC visto en la figura siguiente donde se aplicarán los métodos utilizados en los ejemplos anteriores.



De la figura tendremos

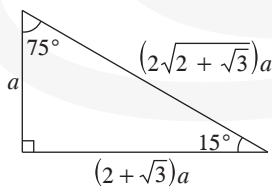
I. En el $\triangle PBC$

$$\tan\left(\frac{37^\circ}{2}\right) = \frac{BC}{PB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

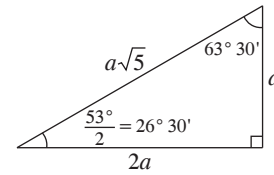
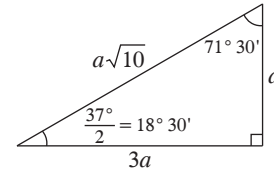
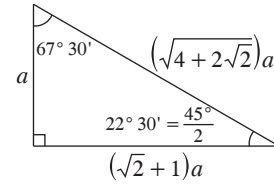
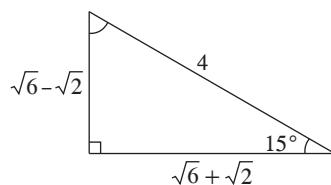
II. En el $\triangle ABP'$

$$\tan\left(\frac{53^\circ}{2}\right) = \frac{AB}{P'B} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Finalmente se muestra a estos triángulos de uso frecuente en los problemas y aplicaciones:

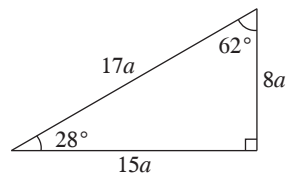
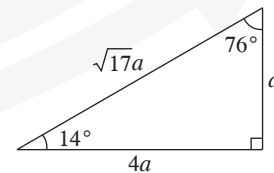
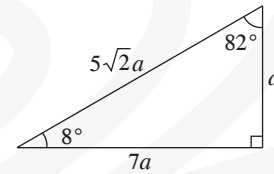


También se puede utilizar



Es común que ciertos ángulos aproximados sean utilizados como notables, así tenemos

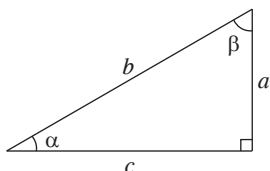
$$\frac{53^\circ}{2}, \frac{37^\circ}{2}, 14^\circ, 8^\circ, 28^\circ, 62^\circ$$



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas recíprocas

De la figura



establecemos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \operatorname{csc} \alpha = \frac{b}{a}$$

¿Qué relación hay entre $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{csc} \alpha$?

Veamos

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} \rightarrow \boxed{\operatorname{csc} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}$$

Asimismo se cumple que

$$\boxed{\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$\boxed{\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}}$$

Ejemplos

$$\text{Si } \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{8} \rightarrow \operatorname{csc} \alpha = 8$$

$$\text{Si } \cos \theta = \frac{4}{11} \rightarrow \sec \theta = \frac{11}{4}$$

$$\text{Si } \tan \varphi = 100 \rightarrow \cot \varphi = \frac{1}{100}$$

Conclusión

Siendo α un ángulo agudo, se cumple

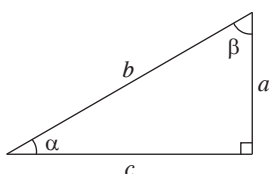
$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

En el triángulo rectángulo de la figura siguiente, α y β son dos ángulos agudos. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , entonces $\alpha + \beta = 90^\circ$ (o en radianes $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$).



Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son ángulos complementarios. Así, aplicando las definiciones de las razones trigonométricas se observa lo siguiente:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{b} = \cos \beta, \quad \cot \alpha = \frac{c}{a} = \tan \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{b} = \operatorname{sen} \beta, \quad \sec \alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{csc} \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{c} = \cot \beta, \quad \csc \alpha = \frac{b}{a} = \sec \beta$$

Entonces, el seno de un ángulo agudo es igual al coseno del ángulo complementario; la tangente de un ángulo agudo es igual a la cotangente del ángulo complementario; la secante de un ángulo agudo es igual a la cosecante del ángulo complementario.

Así podemos plantear

$$\boxed{\operatorname{Razón trigonométrica}(\alpha) = \operatorname{Co-razón trigonométrica}(90^\circ - \alpha)}$$

Ejemplos

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \cos 70^\circ$$

$$\cot 10^\circ = \tan(90^\circ - 10^\circ) = \tan 80^\circ$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{7}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \csc\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos 50^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 50^\circ) = \operatorname{sen} 40^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \cot(90^\circ - 30^\circ) = \cot 60^\circ$$

$$\sec 37^\circ = \csc(90^\circ - 37^\circ) = \csc 53^\circ$$

$$\csc 25^\circ = \sec(90^\circ - 25^\circ) = \sec 65^\circ$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

A continuación se muestran ejercicios donde se emplean las propiedades de razones trigonométricas recíprocas y de razones trigonométricas de ángulos complementarios.

1. Calcule P donde

$$P = \operatorname{sen} 40^\circ \cdot \sec 50^\circ$$

Resolución

Cambiando por la co-razón trigonométrica de $\sec 50^\circ = \csc(90^\circ - 50^\circ)$

Reduciendo

$$P = \operatorname{sen} 40^\circ \cdot \csc 40^\circ$$

Observamos que las RT seno y cosecante son recíprocas, entonces los ángulos son iguales.

Entonces, dado lo anterior concluimos que el producto es 1.

$$\therefore P = 1$$

2. Sea $(\theta + 32^\circ)$ un ángulo agudo, tal que verifique

$$\tan(\theta + 32^\circ) = \cot\theta$$

¿Cuál es el valor de θ ?

Resolución

Son co-razones trigonométricas

$$\tan(\theta + 32^\circ) = \cot\theta$$

Entonces los ángulos son complementarios, por lo que planteamos la siguiente ecuación

$$(\theta + 32^\circ) + \theta = 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ - 32^\circ$$

$$2\theta = 58^\circ$$

$$\therefore \theta = 29^\circ$$

3. Siendo $(2\theta - 10^\circ)$ un ángulo agudo, tal que

$$\sin(20^\circ - 3\theta) \cdot \csc(2\theta - 10^\circ) = 1$$

halle el valor de θ .

Resolución

Son razones trigonométricas recíprocas

$$\sin(20^\circ - 3\theta) \cdot \csc(2\theta - 10^\circ) = 1$$

Entonces los ángulos son iguales, por lo que planteamos la siguiente ecuación:

$$20^\circ - 3\theta = 2\theta - 10^\circ$$

$$20^\circ + 10^\circ = 3\theta + 2\theta$$

$$30^\circ = 5\theta$$

$$\therefore \theta = 6^\circ$$

4. Siendo $(2\alpha + 10^\circ)$ un ángulo agudo, tal que verifique $\sin(2\alpha + 10^\circ) = \cos(\alpha + 20^\circ)$, halle el valor de α .

Resolución

Son co-razones trigonométricas

$$\sin(2\alpha + 10^\circ) = \cos(\alpha + 20^\circ)$$

Entonces los ángulos son complementarios, por lo que planteamos la siguiente ecuación:

$$(2\alpha + 10^\circ) + (\alpha + 20^\circ) = 90^\circ$$

$$3\alpha + 30^\circ = 90^\circ$$

$$3\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$3\alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 20^\circ$$

5. Siendo 2α un ángulo, halle el valor de α si se cumple que

$$\tan 2\alpha \cdot \tan 40^\circ = 1$$

Resolución

No son recíprocos

$$\tan 2\alpha \cdot \tan 40^\circ = 1$$

Entonces se sugiere despejar una de las RT, por ejemplo $\tan 40^\circ$, luego

$$\tan 2\alpha = \frac{1}{\tan 40^\circ}$$

Recíproco de la $\tan 40^\circ$ ($\cot 40^\circ$)

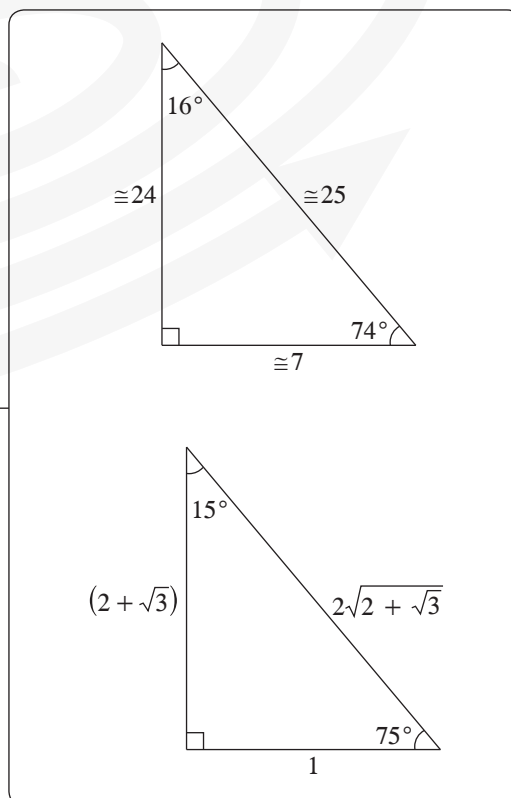
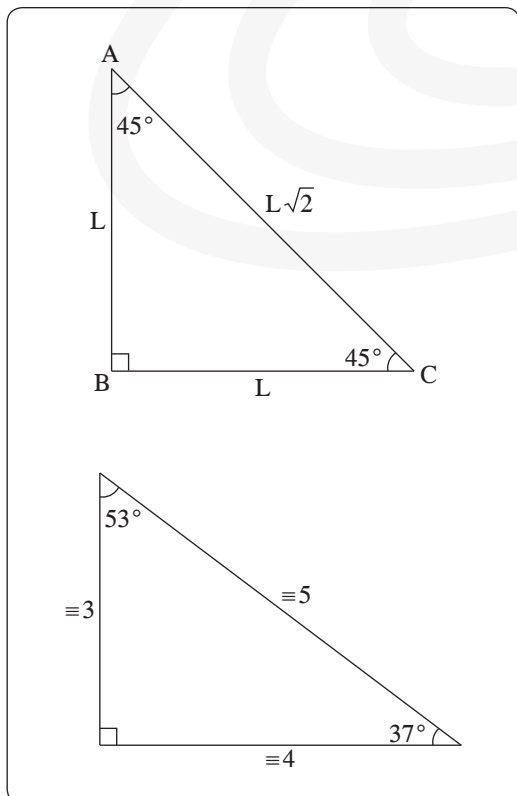
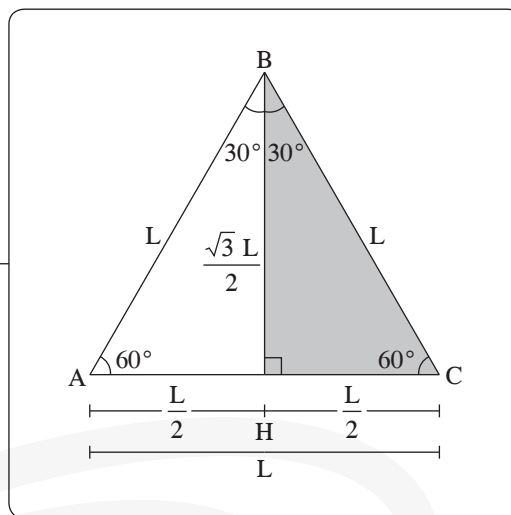
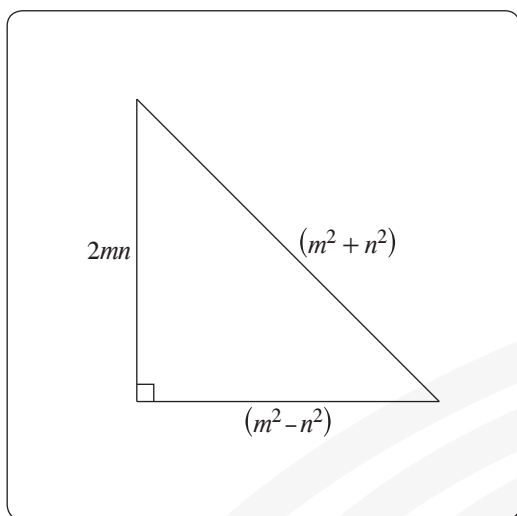
Son co-razones trigonométricas

$$\tan 2\alpha = \cot 40^\circ$$

$$\therefore \alpha = 25^\circ$$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS Y NOTABLES



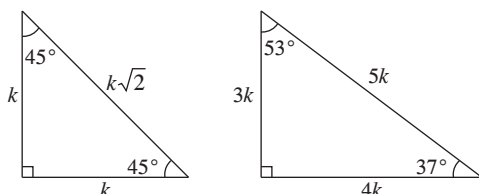


Problemas resueltos

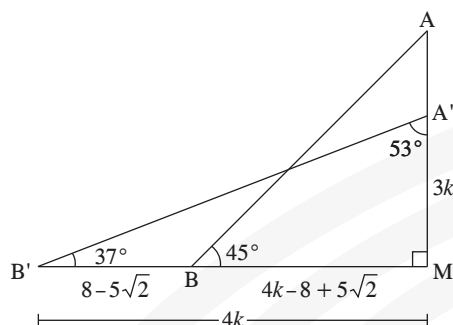
- Una escalera se encuentra apoyada en una pared haciendo un ángulo de 45° . Se resbala y la parte inferior se desliza $(8 - 5\sqrt{2})$ m de su posición inicial y el nuevo ángulo que forma con la pared es 53° . ¿Cuántos metros mide la escalera? (UNI 2012-I)

Resolución

Triángulos rectángulos notables



Sea AB la longitud de la escalera.



Si $A'M = 3k$, entonces $B'M = 4k$ y $A'B' = 5k$.

Se observa que $AB = A'B'$

$$(4k - 8 + 5\sqrt{2})\sqrt{2} = 5k$$

$$4\sqrt{2}k - 8\sqrt{2} + 10 = 5k$$

$$10 - 8\sqrt{2} = 5k - 4\sqrt{2}k$$

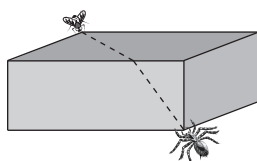
$$2(5 - 4\sqrt{2}) = k(5 - 4\sqrt{2})$$

$$k = 2$$

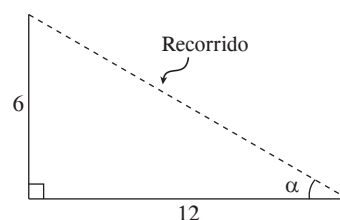
$$\therefore AB = 5k = 5(2) = 10 \text{ m}$$

Rpta.: 10

- Una araña se encuentra ubicada en el vértice inferior de una caja de dimensiones 12 m, 5 m y 1 m. En el otro extremo de la diagonal de la caja está una mosca. La araña se dirige a la mosca recorriendo una distancia mínima sobre la superficie de la caja. Halle el menor ángulo que forma la ruta de la araña sobre la tapa con una arista de la caja. (UNI 2018-I)



Resolución

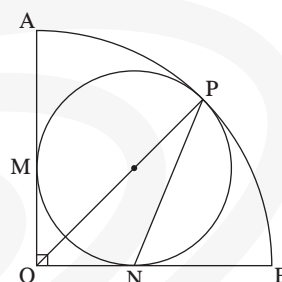


Del gráfico

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

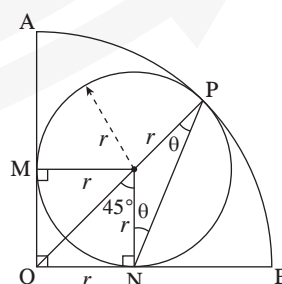
$$\text{Rpta.: } \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

- En la figura mostrada, M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el sector circular AOB.



Si $m\angle OPN = \theta$ rad, calcule $\cot \theta$. (UNI 2016-I)

Resolución



Del gráfico se observa que $\theta + \theta = 45^\circ$

$$\theta = \frac{45^\circ}{2}$$

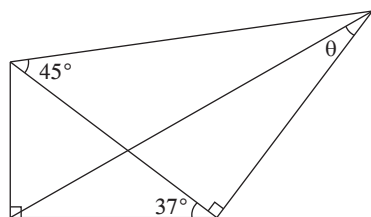
$$\rightarrow \cot \theta = \cot \frac{45^\circ}{2}$$

$$\cot \theta = \csc 45^\circ + \cot 45^\circ$$

$$\therefore \cot \theta = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{Rpta.: } \sqrt{2} + 1$$

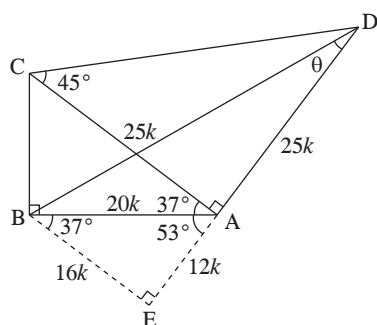
4. Dada la figura



calcule $37\tan\theta$. (UNI 2017-I)

Resolución

Tenemos el siguiente gráfico:



Se traza $\overline{BE}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{DA}$.

En $\triangle ABC$: $AB = 4a$

En $\triangle AEB$: $AB = 5b$

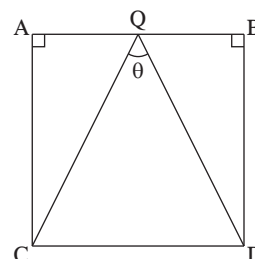
→ $AB = 20k$, $BE = 16k$, $AE = 12k$,
 $AC = 25k$, $AD = 25k$

En $\triangle BED$: $\tan\theta = \frac{16k}{37k}$

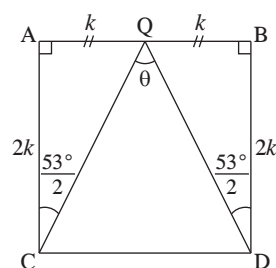
$$\therefore 37\tan\theta = 16$$

Rpta.: 16

5. La siguiente figura es un cuadrado, donde Q es el punto medio de $\overline{AB}$. Calcule $\csc\theta$.



Resolución



Reconocemos el triángulo rectángulo de $\frac{53^\circ}{2}$.

Luego

$$\theta = \frac{53^\circ}{2} + \frac{53^\circ}{2}$$

$$\theta = 53^\circ$$

Piden $\csc\theta = \csc 53^\circ$

$$\csc 53^\circ = \frac{5}{4}$$

Rpta.: $\frac{5}{4}$



Helicopráctica

Nivel I

1. En dos triángulos rectángulos consideremos los ángulos agudos α y β , respectivamente. Si

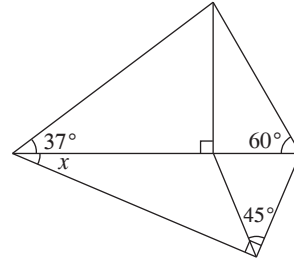
$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{y} \quad \sec \beta = \cot \alpha$$

calcule

$$E = \frac{12 \tan^2 \alpha + 9 \tan^2 \beta}{3 \csc^2 \alpha - \csc^2 \beta}$$

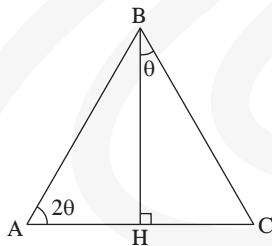
Resolución

3. Del gráfico mostrado, calcule $\tan x$.



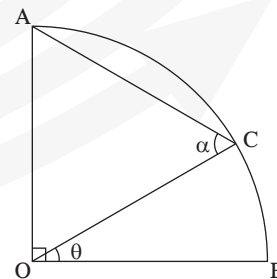
Resolución

2. Del gráfico, se cumple que $AH = 3$ y $HC = 2$. Calcule $\cos^2 \theta$.



Resolución

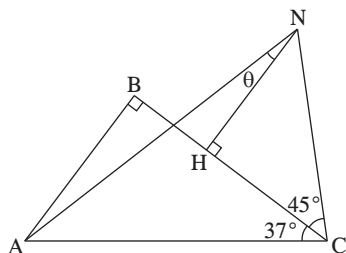
4. Calcule $\tan \alpha$ si AOB es un sector circular, además $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{13}$.



Resolución

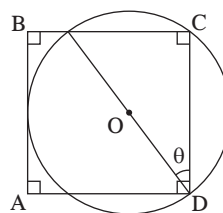
Nivel II

5. Si $BH = HC$, calcule $\tan\theta$.



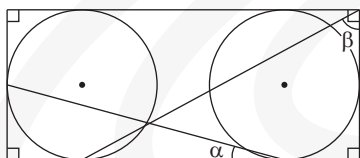
Resolución

7. Siendo ABCD un cuadrado y O centro, calcule $\tan\theta$.



Resolución

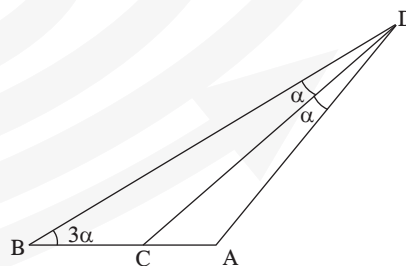
6. Del gráfico mostrado, calcule $\tan\alpha \cdot \tan\beta$.



Resolución

8. Si $AB = 3AC$, calcule

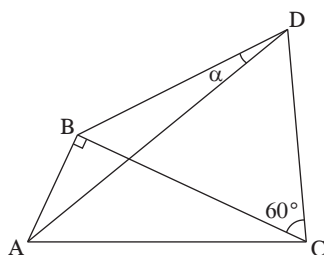
$$E = (2\cot 5\alpha + \cot \alpha)\tan 2\alpha$$



Resolución

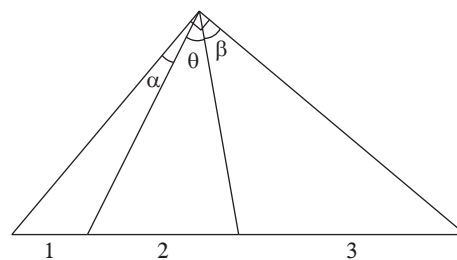
Nivel III

9. Si $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$ y $BC = BD$, calcule $\cot \alpha$.



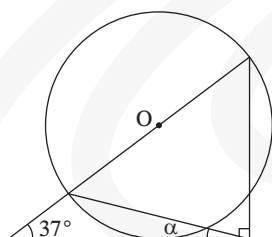
Resolución

11. Del gráfico, calcule $\tan(\alpha + \theta) \cdot \tan(\theta + \beta)$.



Resolución

10. Si O es centro de la circunferencia, calcule $\csc \alpha$.



Resolución

12. Calcule

$$E = \frac{\tan(A + 45^\circ) \cdot \tan(B - 45^\circ) + \cos A}{\cos A \cdot \csc B + \sin B}$$

donde A y B son ángulos agudos que cumplen

$$(\sqrt{5} - 1)\cot A = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \text{ y } \sec B = \sqrt{5} + 1$$

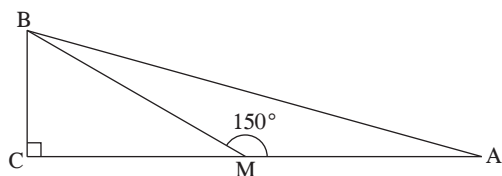
Resolución



Helicotaller

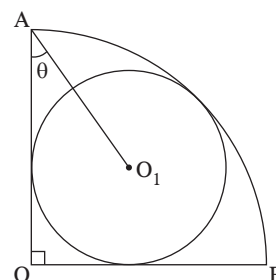
Nivel I

- En la figura, $MA = 2$ cm y $AB = 4$ cm. Halle BC .



Resolución

- Siendo O y O_1 centros, calcule $\tan\theta$.

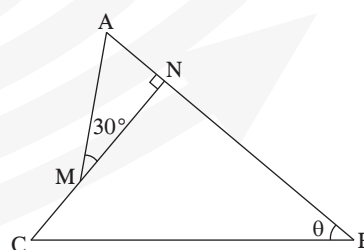


Resolución

Nivel II

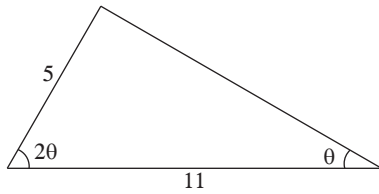
- En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , cuya hipotenusa mide 7 m y la mediana relativa al cateto mayor mide 5 m y con él forma un ángulo agudo θ . Calcule $\cos\theta$.
- Del gráfico, calcule $1 - \cos\theta$ si $CM = \sqrt{3}$, $AM = 2$ y $AB = BC$.

Resolución



Resolución

5. Según el gráfico, calcule $\cot\theta$.



Resolución

Nivel III

7. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que

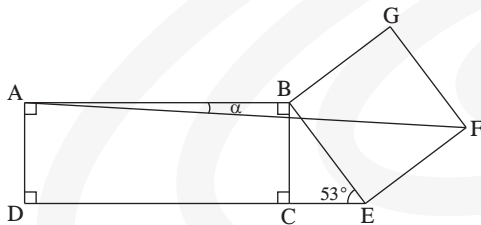
$$\cot A + \cot B = \frac{13}{6}$$

Calcule $\sqrt{13}\sin A - \tan B$.

(Considere $BC < AC$).

Resolución

6. Si BEFG es un cuadrado y $2AB = 3BC$, calcule $\cot\alpha$.



Resolución

8. Sobre el cateto $\overline{BC}$ de un triángulo rectángulo ABC ($m\angle B = 90^\circ$), se construye exteriormente otro triángulo rectángulo BCD, recto en D, siendo α la medida del ángulo agudo formado por $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, además $m\angle BAC = 30^\circ$ y $m\angle BCD = 45^\circ$. Calcule $\cot\alpha$.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. En un triángulo ABC, recto en C, se cumple que

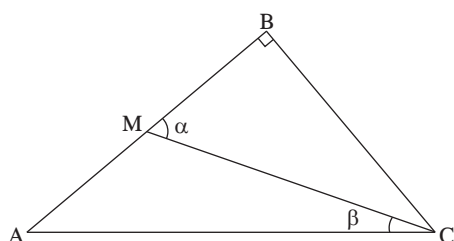
$$\tan A = 2 \sec B$$

Calcule $\csc^2 B - 2 \sec A$.

- A) 2 B) 0 C) 3
D) 4 E) 1

2. Si $AM = MB$, calcule

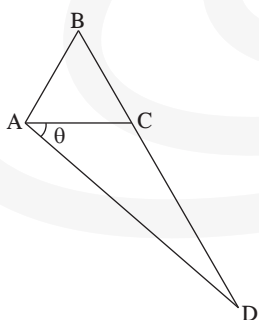
$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \alpha}{\sin \beta}$$



- A) 2 B) 1 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

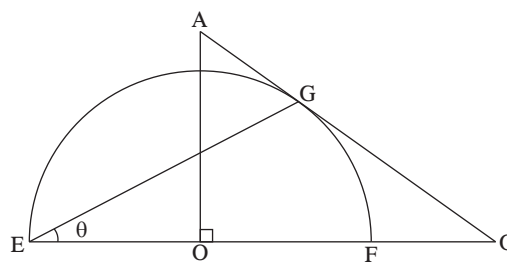
Nivel II

3. Sabiendo que ABC es un triángulo equilátero donde $CD = 2AB$, calcule $\tan \theta$.



- A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

4. Siendo O centro y $GC = 3AG$, calcule $\tan \theta$.



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Nivel III

5. En un triángulo BC ($m\angle B = 90^\circ$), se traza la mediana $\overline{AM}$ y luego la mediana $\overline{AN}$ del triángulo ABM prolongándola hasta P, tal que $\overline{PM} \perp \overline{AM}$. Si $m\angle BAC = 53^\circ$ y $AC = 5$, ¿cuánto mide la perpendicular trazada de P a $\overline{BC}$?

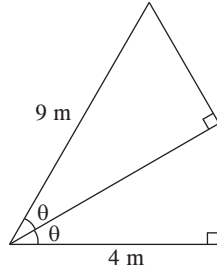
- A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{6}{11}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{3}{11}$ E) $\frac{5}{6}$



Test 2

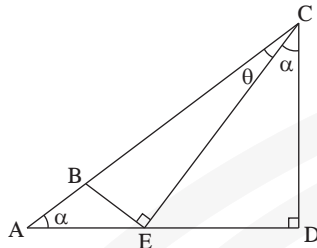
Nivel I

1. Calcule $\cos\theta$.



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

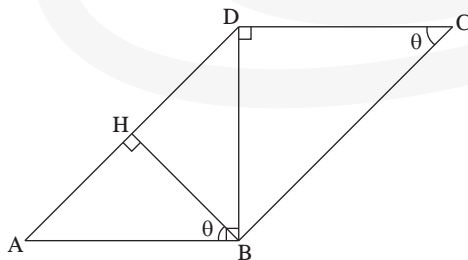
2. Si $AB = 5$ y $BC = 13$, calcule $25\cot^2\theta$.



- A) 81 B) 49 C) 36
D) 144 E) 121

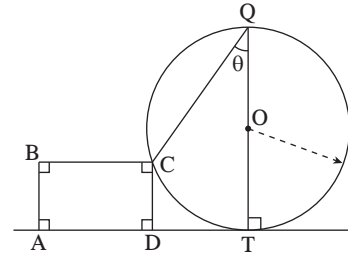
Nivel II

3. En el gráfico, se cumple que $CD = 2AB$, calcule $\tan\theta$.



- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) 3

4. A partir del gráfico, calcule $\tan\theta$ si $AB = 9$ m y $TD = 15$ m. (T es punto de tangencia).



- A) $\frac{15}{41}$ B) $\frac{16}{41}$ C) $\frac{18}{41}$
D) $\frac{20}{41}$ E) $\frac{3}{5}$

Nivel III

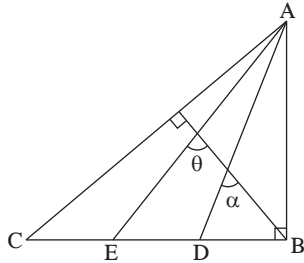
5. Se tiene dos circunferencias tangentes exteriormente con radios R y r ($R > r$). Calcule el cuadrado de la cotangente del ángulo formado por la recta tangente a ambas circunferencias y la recta que une los centros en función de r y R .

- A) $\frac{4Rr}{(R-r)^2}$ B) $\frac{4Rr}{(R+r)^2}$ C) $\frac{2Rr}{(R-r)^2}$
D) $\frac{2Rr}{(R+r)^2}$ E) $\frac{Rr}{(R-r)^2}$



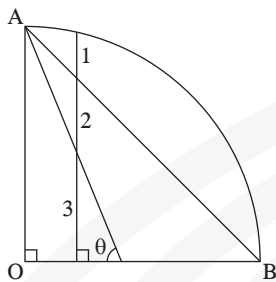
Helicodesafío

1. Halle AB si $3\cos\theta = \cos\alpha$, además, $BD = DE = EC = 1$ m.



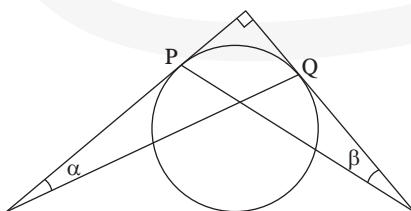
- A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m B) $2\sqrt{5}$ m C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ m
D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ m E) $\frac{\sqrt{35}}{5}$ m

2. Calcule $\tan\theta$ si AOB es un sector circular.



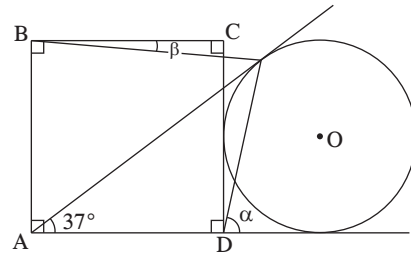
- A) $\frac{31}{11}$ B) $\frac{11}{31}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{9}{8}$

3. Calcule $E = \tan\alpha - \tan\beta + \tan\alpha \cdot \tan\beta$. (P y Q son puntos de tangencia).



- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

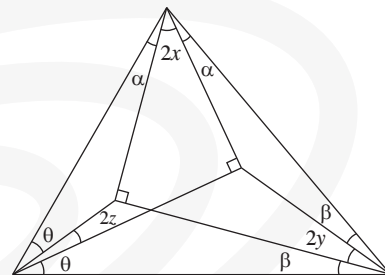
4. Calcule $E = 2\tan\alpha + \cot\beta$, ABCD es un cuadrado.



- A) 5 B) 17 C) 13
D) 19 E) 21

5. Reduzca

$$E = \frac{\sin(\theta - \beta) \cdot \csc 2(y - z) + \tan(\alpha + \beta + \theta) \cdot \tan(x + y + z)}{\sec(\alpha + x + z) \cdot \sin(\beta + \theta + y)}$$



- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



Objetivos

- Describe los diferentes métodos y herramientas para dar respuesta certera y coherente a un problema de triángulos rectángulos.
- Orienta a los estudiantes interesados en conocer una forma conveniente y eficiente de resolución de triángulos rectángulos.



Sabías que...

Historia oculta de Pitágoras, el iniciado

En la vida de este griego universal, elevado al estatus de los dioses, Pitágoras revolucionó a la sociedad de su tiempo, siendo incomprendido, pero iniciado en las artes mágicas. Fue un geómetra de enorme talento, protagonista de innumerables leyendas y eterno aspirante a la perfección. Su prodigiosa espiritualidad y genialidad han dejado una huella imborrable en la historia del pensamiento y de la ciencia.

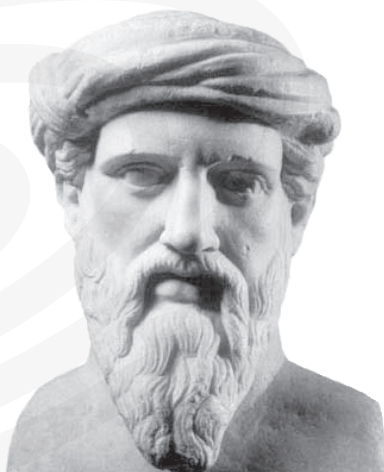
La leyenda nos dice que Pitágoras, como buen iniciado, conocía perfectamente sus anteriores reencarnaciones, primeramente como vegetal y animal y más tarde como ser humano. Recordaba al detalle sus andanzas bajo su otro nombre de “Etálides, hijo de Hermes”, y afirmaba haber sido en otra vida héroe troyano, concretamente Eufronios, para después ser el rapsoda Hermotimes, y más tarde haber encarnado al humilde pescador legendario Pirro. También sabía que había sido madre de una de las más famosas prostitutas de Grecia.

Pitágoras estudió astronomía y geometría durante casi 20 años en Egipto y después fue llevado iniciáticamente a Babilonia, donde los magos le adiestraron en el ritualismo, mística, aritmética y música.

Los números eran para Pitágoras un fenómeno místico, una realidad autónoma, que poseían vida propia y eran los responsables de la “armonía divina”, que siempre ha gobernado al mundo.

Pitágoras estaba considerado por sus seguidores como un “daimon”, es decir, un ser equivalente e intermedio entre los hombres y la divinidad, dotado con poderes paranormales, los cuales desarrollaba en la “capilla de Eleusis”, en donde desarrollaba para sus iniciados “adeptos” (los pitagóricos) los cultos “más mágicos” de la época.

<https://oculto.eu/historia-oculta-de-pitagoras-el-iniciado/>





RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En este capítulo vamos a determinar la longitud de los tres lados del triángulo rectángulo y la medida de sus dos ángulos agudos.

Se podrá determinar lo expuesto:

- si se conoce la longitud de un lado y un ángulo agudo.
- si se conocen las longitudes de dos de sus lados.

**Observación**

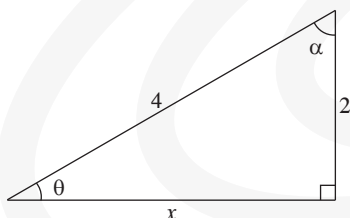
Una razón trigonométrica de un ángulo agudo comprende tres cantidades: dos lados y un ángulo agudo, luego podremos determinar al tercero.

Conociendo las longitudes de dos lados

Si se conoce dos lados del triángulo rectángulo, entonces se podrá determinar el otro por el teorema de Pitágoras. Por ende se podrá determinar los valores de los dos ángulos agudos.

Ejemplo

Resuelva el triángulo mostrado.

**Resolución**

Se desconoce α , θ y x .

Teorema de Pitágoras

$$4^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Luego: } \sin \theta = \frac{2}{4} \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

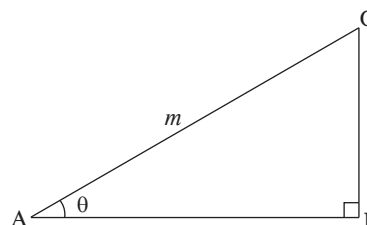
Dados un ángulo agudo y la longitud de un lado

En los casos siguientes se resolverán los triángulos rectángulos. Para esto se da como conocido un ángulo agudo (θ) y la longitud de un lado (m).

1. Si m es la longitud de la hipotenusa

Lado dato: m

Lados incógnitas: BC y AB



La idea es generar una razón trigonométrica para θ con el lado dato y el lado incógnita, pero sugerimos que dicha razón trigonométrica lo obtenga relacionando el lado incógnita con el lado dato, esto es:

Cálculo de BC

$$\frac{BC}{m} = \frac{\text{Cateto opuesto a } \theta}{\text{Hipotenusa}} = \sin \theta$$

Luego

$$\frac{BC}{m} = \sin \theta \rightarrow BC = m \sin \theta$$

De igual forma

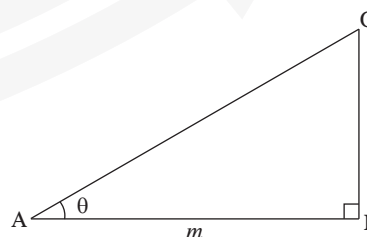
$$\frac{AB}{m} = \frac{\text{Cateto adyacente a } \theta}{\text{Hipotenusa}} = \cos \theta \rightarrow AB = m \cos \theta$$

Cálculo de la $m\angle C$

$$C = 90^\circ - A \rightarrow C = 90^\circ - \theta$$

Los demás casos se resolverán de forma análoga.

2. Si m es la longitud del cateto adyacente a θ .

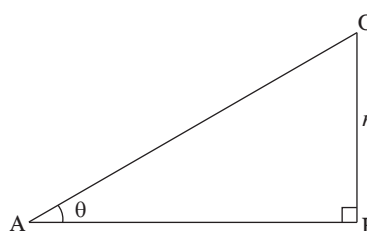


$$\frac{BC}{m} = \tan \theta \rightarrow BC = m \tan \theta$$

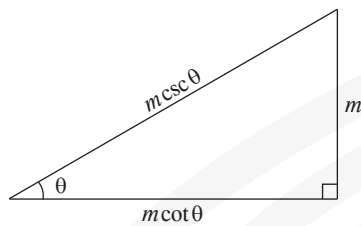
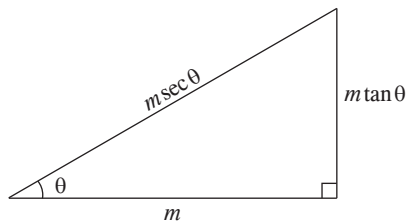
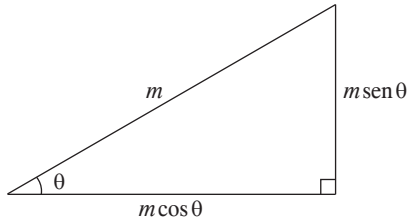
$$\frac{AC}{m} = \sec \theta \rightarrow AC = m \sec \theta$$

$$C = 90^\circ - A \rightarrow C = 90^\circ - \theta$$

3. Si m es la longitud del cateto opuesto a θ .

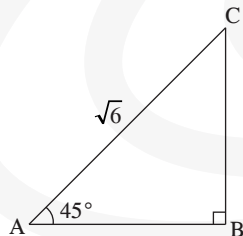


- $\frac{AB}{m} = \cot \theta \rightarrow AB = m \cot \theta$
- $\frac{AC}{m} = \csc \theta \rightarrow AC = m \csc \theta$
- $C = 90^\circ - A \rightarrow C = 90^\circ - \theta$



Ejemplo 1

Resuelva el triángulo ABC que se muestra.

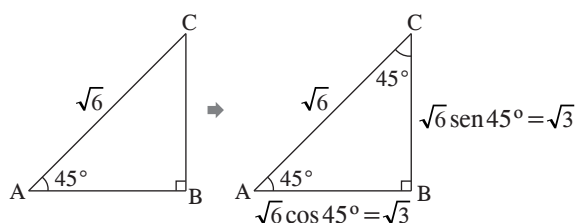


Resolución

De la figura

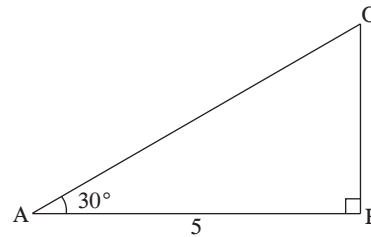
- $\frac{BC}{\sqrt{6}} = \sin 45^\circ \rightarrow BC = \sqrt{6} \sin 45^\circ = \sqrt{3}$
- $\frac{AB}{\sqrt{6}} = \cos \theta \rightarrow AB = \sqrt{6} \cos 45^\circ = \sqrt{3}$
- $C = 90^\circ - A \rightarrow C = 45^\circ$

En forma directa



Ejemplo 2

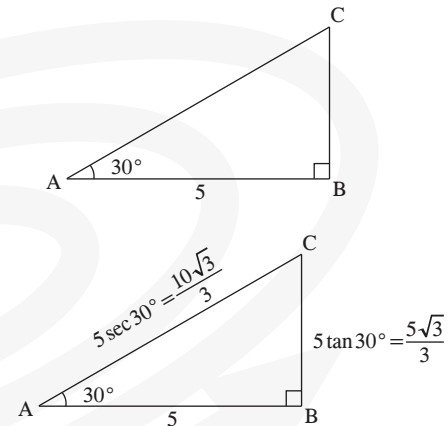
Resuelva el triángulo ABC que aparece en la figura mostrada.



Resolución

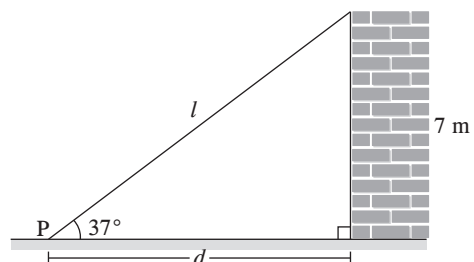
- $\frac{BC}{5} = \tan 30^\circ \rightarrow BC = 5 \tan 30^\circ = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{AC}{5} = \sec 30^\circ \rightarrow AC = 5 \sec 30^\circ = 5 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{10\sqrt{3}}{3}$
- $C = 90^\circ - A \rightarrow C = 60^\circ$

En forma directa



Ejemplo 3

En la figura siguiente se tiene una pared de 7 m de alto. Halle la longitud de la cuerda (l) y la distancia de P hacia la pared (d).



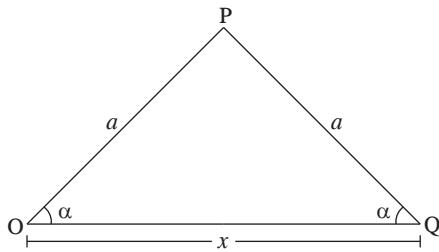
Resolución

Aplicando el caso de resolución de un triángulo rectángulo mostrado anteriormente, tenemos

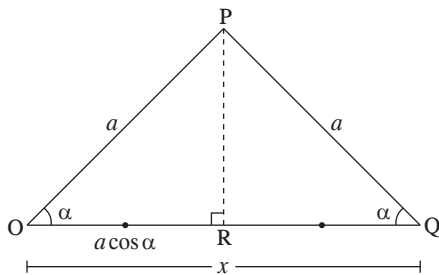
- $l = (7 \text{ m}) \csc 37^\circ = (7 \text{ m}) \frac{5}{3} = \frac{35}{3} \text{ m}$
- $d = (7 \text{ m}) \cot 37^\circ = (7 \text{ m}) \frac{4}{3} = \frac{28}{3} \text{ m}$

Ejemplo 4

En el triángulo OPQ mostrado, demuestre que la longitud de la base (x) es $2a \cos \alpha$.



Resolución



Del punto P trazamos $\overline{PR} \perp \overline{OQ}$.

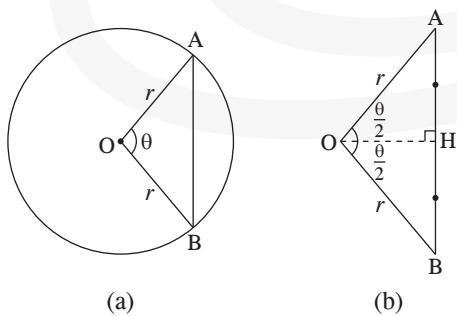
En el triángulo ORP: $OR = a \cos \alpha$

Como R es punto medio de $\overline{OQ}$, tendremos

$$x = 2OR = 2a \cos \alpha$$

Ejemplo 5

De la figura siguiente (a), demuestre que la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es $2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. (O: centro de la circunferencia de radio r)



Resolución

De la figura anterior (b) trazamos la perpendicular $\overline{OH}$ que a su vez es bisectriz del $\angle AOB$, entonces

$$AH = r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como H es un punto medio de $\overline{AB}$, tenemos

$$AB = 2AH = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

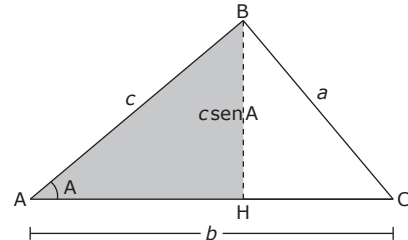
Teorema

Área de una región triangular

El área de cualquier región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de dos de sus lados, multiplicado por el seno del ángulo que forman dichos lados.

Demostración

En el $\triangle ABC$ de lados a , b y c de la figura que se muestra a continuación, se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, de donde $BH = c \sin A$.



Se sabe

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{Base})(\text{Altura})}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(b)(c \sin A)}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \sin A$$

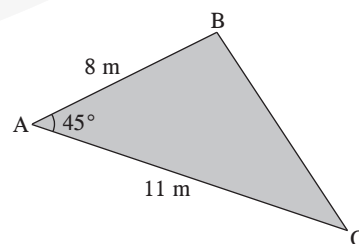
Análogamente se demuestra que

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ac}{2} \sin B \quad \text{y} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} \sin C$$

donde $S_{\triangle ABC}$: área de la región triangular ABC.

Ejemplo 6

Calcule el área de la región limitada por un terreno de forma triangular, donde dos de sus dimensiones miden 8 m y 11 m, y el ángulo que forman dichas dimensiones es 45° .



Resolución

Sea S el área de la región triangular (ver figura anterior). Entonces

$$S = \frac{(8 \text{ m})(11 \text{ m})}{2} \sin 45^\circ$$

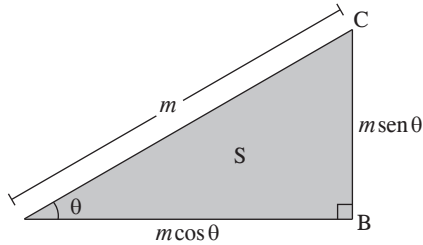
$$S = \frac{88}{2} \text{ m}^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore S = 22\sqrt{2} \text{ m}^2$$

Ejemplo 7

La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es m y uno de sus ángulos agudos mide θ . Calcule el área de dicha región en términos de m y θ .

Resolución



De la figura: $S = \frac{(m \cos \theta)(m \sin \theta)}{2}$

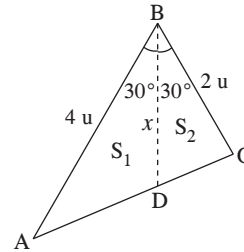
$$\therefore S = \frac{m^2}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta$$

Ejemplo 8

En un triángulo ABC se tiene que $B = 60^\circ$. Se traza la bisectriz $\overline{BD}$ ($D \in \overline{AC}$). Halle BD si $AB = 4u$ y $BC = 2u$.

Resolución

Del enunciado podemos obtener el siguiente gráfico:



Sea la longitud de $BD = x$, $S_1 = S_{\triangle ABD}$ (área de la región ABD) y $S_2 = S_{\triangle DBC}$ (área de la región triangular DBC).

Como $S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2$

$$\rightarrow \frac{(4)(2)}{2} \sin 60^\circ = \frac{4x}{2} \sin 30^\circ + \frac{(x)(2)}{2} \sin 30^\circ$$

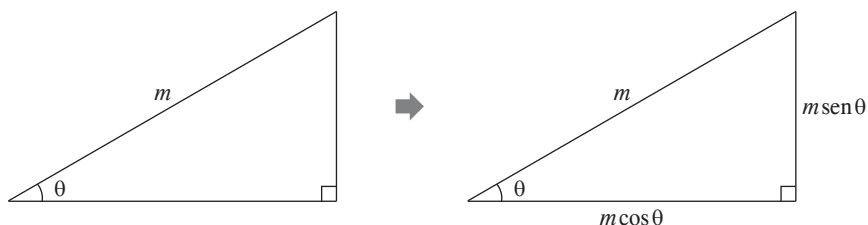
$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x \sin 30^\circ (2 + 1)$$

$$\therefore x = \frac{4\sqrt{3}}{3} u$$

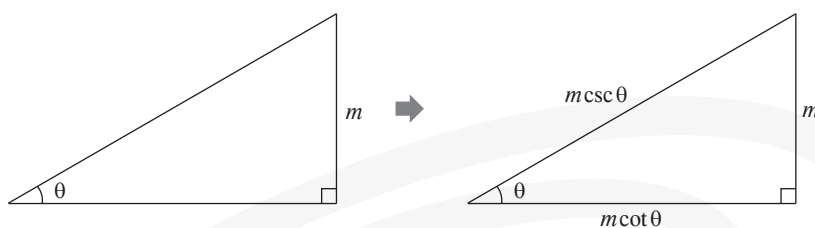


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

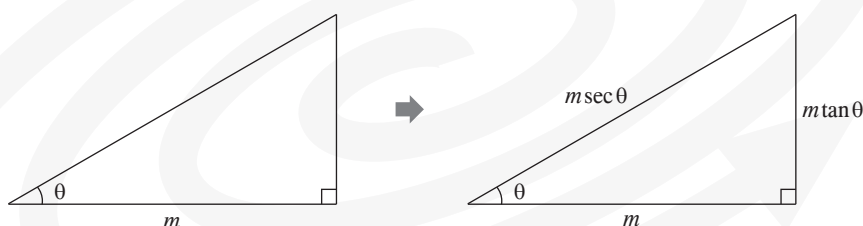
Caso 1. Si el lado conocido es la hipotenusa



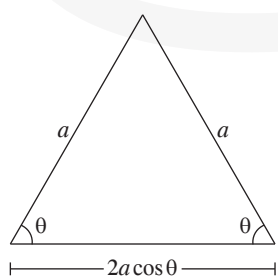
Caso 2. Si se conoce el cateto opuesto al ángulo conocido.



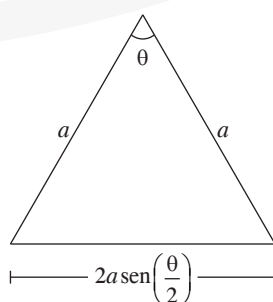
Caso 3. Si se conoce el cateto adyacente al ángulo conocido.



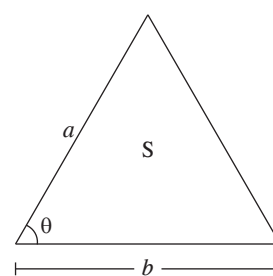
Observación 1



Observación 2



Observación 3

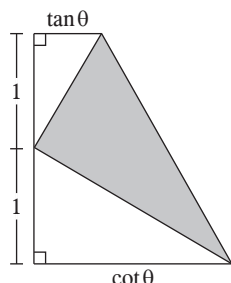


$$S = \frac{ab}{2} \sin \theta$$

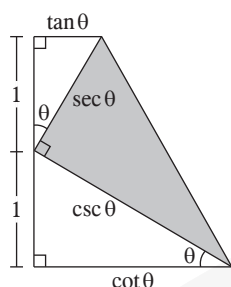


Problemas resueltos

1. En la figura mostrada, ¿para qué valor de θ el área sombreada es mínima?
(Examen de admisión UNI 2018-I)



Resolución



S: área sombreada

$$S = \frac{\sec \theta \cdot \csc \theta}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}(\tan \theta + \cot \theta) \quad \dots(1)$$

Observación:

$$\tan \theta + \cot \theta \geq 2$$

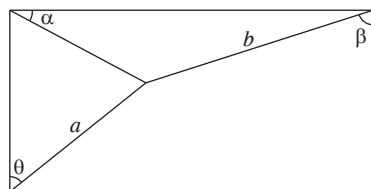
De (1), el área será mínima cuando se cumpla

$$\tan \theta + \cot \theta = 2$$

esto ocurre cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Rpta.: $\frac{\pi}{4}$

2. En la figura mostrada



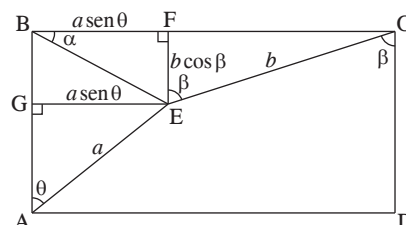
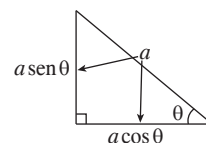
el valor de

$$E = \frac{a \tan \alpha \cdot \sin \theta}{b \cos \beta}$$

es

(Examen de admisión UNI 2013-I)

Resolución



En el triángulo BFE: $\tan \alpha = \frac{b \cos \beta}{a \sin \theta}$

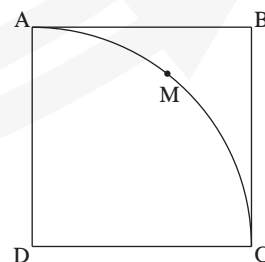
$$a \tan \alpha \cdot \sin \theta = b \cos \beta$$

$$\frac{a \tan \alpha \cdot \sin \theta}{b \cos \beta} = 1$$

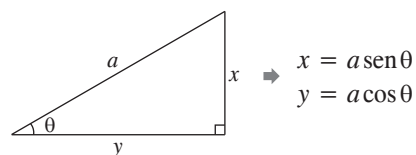
$$\therefore E = 1$$

Rpta.: 1.

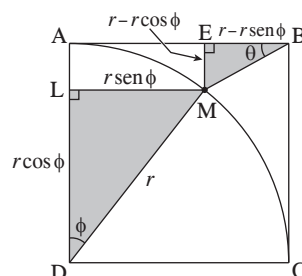
3. En el gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado, ADC es un sector circular con centro en D, $m\angle ABM = \theta$ y $m\angle ADM = \phi$. Calcule $\tan \theta$ en términos de ϕ .
(Examen de admisión UNI 2010-II)



Resolución



Datos: $m\angle ABM = \theta$ y $m\angle ADM = \phi$



Sea $DM = r$, entonces en el triángulo DLM

$$LM = r \sin \phi$$

$$LD = r \cos \phi$$

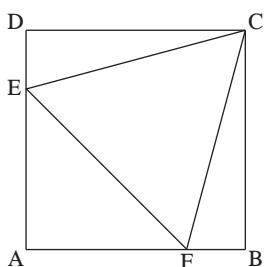
En el triángulo BEM

$$\tan \theta = \frac{r - r \cos \phi}{r - r \sin \phi} \rightarrow \tan \theta = \frac{1 - \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

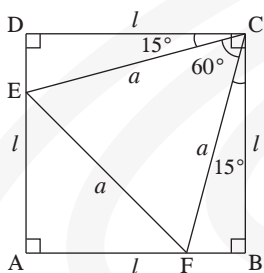
$$\text{Rpta.: } \frac{1 - \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

4. Si ABCD es un cuadrado y CEF un triángulo equilátero, entonces el valor de $\frac{\text{Área CEF}}{\text{Área ABCD}}$ es igual a

(Examen de admisión UNI 2012-I)



Resolución



Piden $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\square ABCD}} = R = ?$

$$\triangle EDC \cong \triangle FCB$$

$$m\angle DCE = m\angle FCB = 15^\circ$$

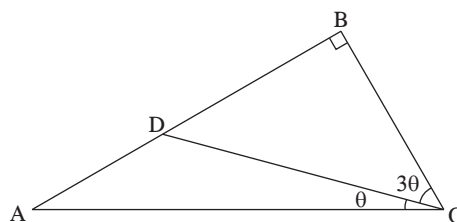
$$R = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{l^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sec 15^\circ)^2$$

$$\therefore R = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\text{Rpta.: } 2\sqrt{3} - 3.$$

5. En la figura mostrada, $5BC = 9AD$. Reduzca

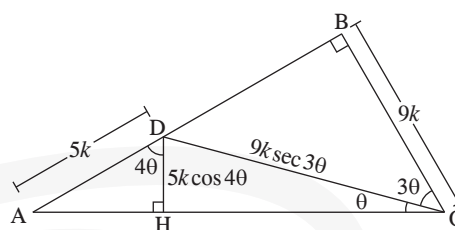
$$E = \frac{\sin \theta \cdot \sec 4\theta + \cos 3\theta}{\cos 3\theta}$$



Resolución

Dato: $5BC = 9AD$

$$\rightarrow AD = 5k \text{ y } BC = 9k$$



Notamos que

$$\sin \theta = \frac{5k \cos 4\theta}{9k \sec 3\theta} \rightarrow \sin \theta = \frac{5 \cos 4\theta}{9 \sec 3\theta}$$

Reemplazando en E

$$E = \frac{\sin \theta \cdot \sec 4\theta}{\cos 3\theta} + 1$$

$$E = \frac{1}{\frac{5 \cos 4\theta \cdot \sec 4\theta}{9 \sec 3\theta \cdot \cos 3\theta}} + 1 \rightarrow E = \frac{5}{9} + 1$$

$$E = \frac{14}{9}$$

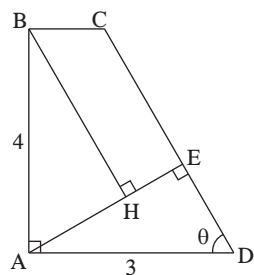
$$\text{Rpta.: } \frac{14}{9}$$



Helicopráctica

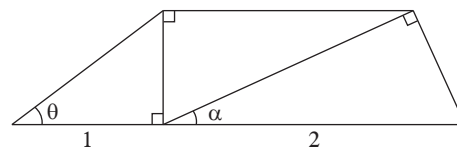
Nivel I

1. Del gráfico, halle EH en términos de θ .



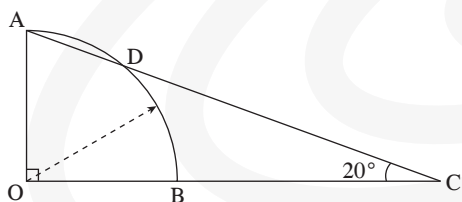
Resolución

3. Del gráfico mostrado, calcule $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \theta}$.



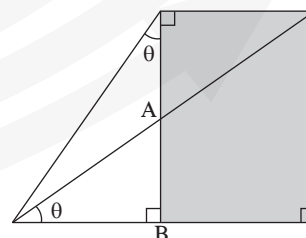
Resolución

2. Si AOB es un sector circular de radio r , halle CD.



Resolución

4. Si $AB = 1$, calcule el área de la región sombreada en términos de θ .



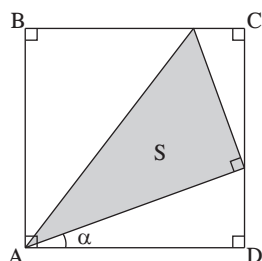
Resolución

Nivel II

5. Calcule

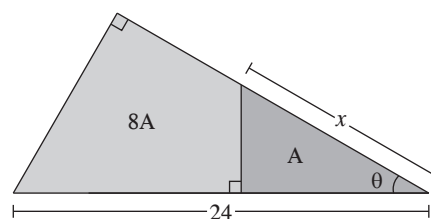
$$\frac{\sec^2 \alpha (1 - \tan \alpha)}{S}$$

si S representa el área de la región sombreada. (Considere que ABCD es un cuadrado de lado a).



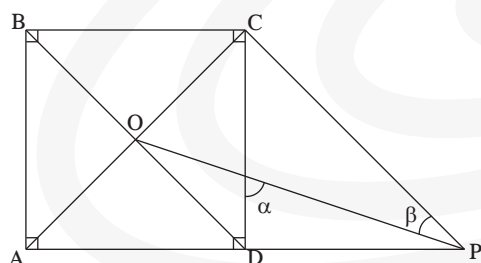
Resolución

7. Del gráfico, halle el valor de x .



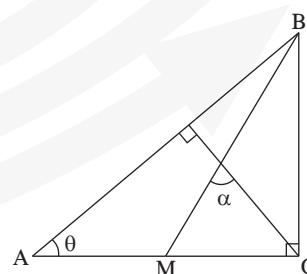
Resolución

6. Calcule $\tan \alpha - 2 \tan(\alpha - \beta)$ si ABCD es un cuadrado.



Resolución

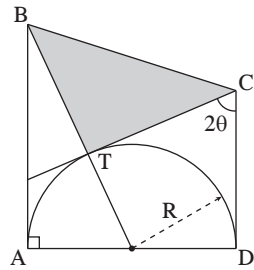
8. En el gráfico, calcule $\tan \alpha$ en términos de θ si $AM = MC$.



Resolución

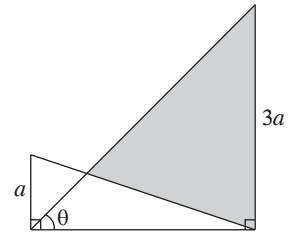
Nivel III

9. Si T es punto de tangencia, calcule el área de la región sombreada en términos de θ y R.



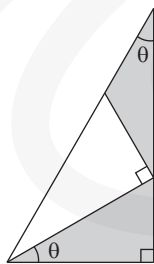
Resolución

11. Del gráfico mostrado, calcule el área de la región sombreada en términos de a y θ .



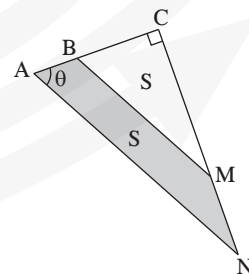
Resolución

10. Si las regiones sombreadas son equivalentes, calcule $\tan 2\theta$.



Resolución

12. Del gráfico, halle el valor de AB si $AC = 1$, $BM = \sqrt{\tan \theta}$ y $AN \parallel BM$.



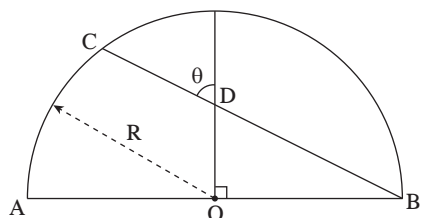
Resolución



Helicotaller

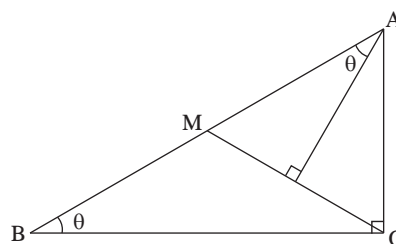
Nivel I

1. Halle CD en términos de θ y R.



Resolución

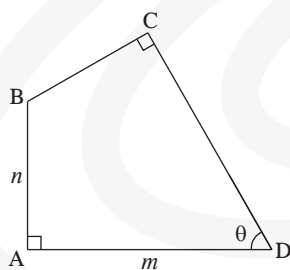
3. Si $AM=2$, halle BC en términos de θ .



Resolución

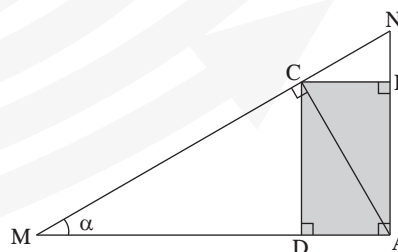
Nivel II

2. A partir del cuadrilátero mostrado, halle BC.



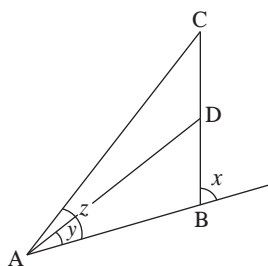
Resolución

4. Si $MN=a$, calcule el área del rectángulo ABCD en términos de α y a .



Resolución

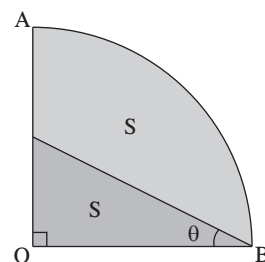
5. En la figura, $BD = DC$. Calcule $\cot y$ en términos de x y z .



Resolución

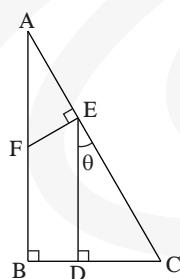
Nivel III

7. Si AOB es un sector circular, calcule $\sin(\tan \theta)$. (S es área).



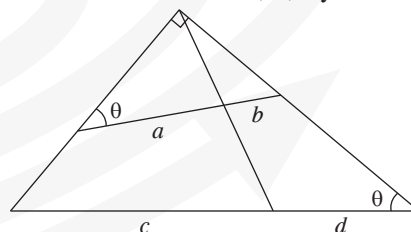
Resolución

6. Calcule $\sec \theta$ si las áreas de las figuras AEF, BFED y EDC tienen el mismo valor.



Resolución

8. Calcule $\tan \theta$ en términos de a , b , c y d .



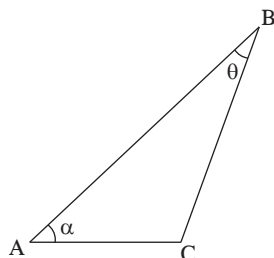
Resolución



Test 1

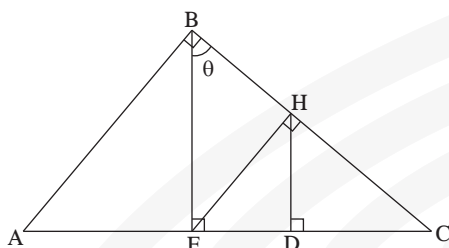
Nivel I

1. En el gráfico, $AB = b$ y $AC = a$. Calcule $\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cot \theta$ en términos de a y b .



- A) $\frac{b}{a}$ B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{2a}{b}$
D) $\frac{2b}{a}$ E) $\frac{b}{2a}$

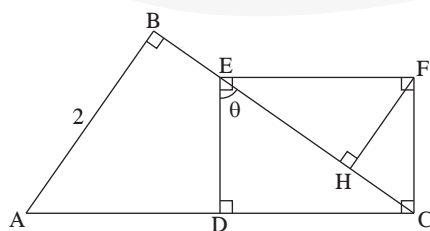
2. Si $AC = 2$, halle DH en términos de θ .



- A) $2\sin^3 \theta \cdot \cos \theta$ B) $2\sin^2 \theta \cdot \cos \theta$
C) $2\sin \theta \cdot \cos^2 \theta$ D) $2\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta$
E) $2\sin \theta \cdot \sec^2 \theta$

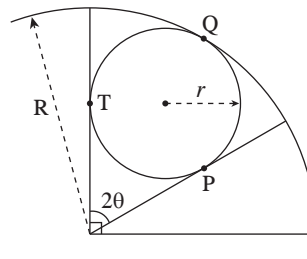
Nivel II

3. Si $AD = DC$, halle EH en términos de θ .



- A) $\sin \theta \cdot \sec \theta$ B) $\cos \theta \cdot \csc \theta$
C) $\sin \theta \cdot \tan \theta$ D) $\cos \theta \cdot \cot \theta$
E) $\sin \theta \cdot \cos \theta$

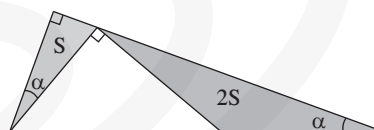
4. Si en el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia, halle el valor de r en términos de θ y R .



- A) $\frac{R}{\sin \theta + 1}$ B) $\frac{R}{\csc \theta + 1}$
C) $\frac{R}{\cos \theta + 1}$ D) $\frac{R}{\sec \theta + 1}$
E) $\frac{R}{\sin \theta + \cos \theta}$

Nivel III

5. Determine $K = \cot \alpha + \tan \alpha$. (S es área).



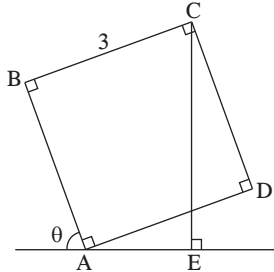
- A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2
D) $2\sqrt{3}$ E) 4



Test 2

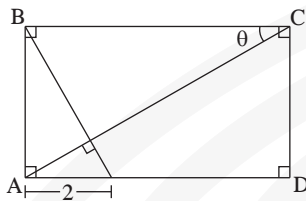
Nivel I

1. Si ABCD es un cuadrado, halle CE en términos de θ .



- A) $3(\tan \theta + \cot \theta)$ B) $3(\sec \theta + \sec \theta)$
 C) $3(\cos \theta + \csc \theta)$ D) $3(\sec \theta + \csc \theta)$
 E) $3(\sec \theta + \cos \theta)$

2. Calcule el perímetro del rectángulo ABCD en términos de θ .



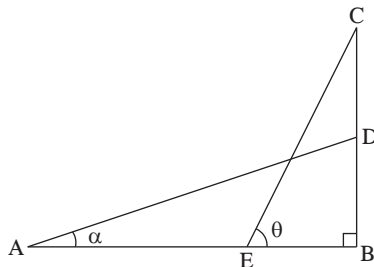
- A) $4(\sec \theta + \cos \theta)$ B) $4\sec \theta(1 + \cos \theta)$
 C) $4\tan \theta(\tan \theta + 1)$ D) $4\cot \theta(\cot \theta + 1)$
 E) $4\sec \theta(\sec \theta + \cos \theta)$

Nivel II

3. En el gráfico, calcule

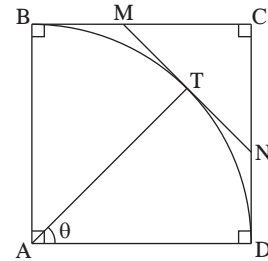
$$\frac{\tan \alpha (\tan \theta + 1)}{\tan \theta - 1}$$

si $AE = BC$ y $BE = CD$.



- A) -2 B) -1 C) $\frac{1}{2}$
 D) 1 E) 2

4. Si $\frac{MT}{TN} = \frac{3}{2}$, efectúe $K = \cos \theta - \sec \theta$. (BAD es un sector circular).

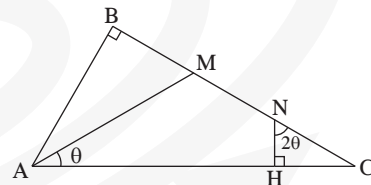


- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$
 D) $\frac{4}{5}$ E) 1

Nivel III

5. Si $MN = NC$, $AB = 8$ y $NH = 3$, calcule

$$\frac{\tan 2\theta - \tan \theta}{\sec 2\theta}$$



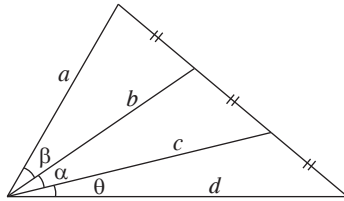
- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
 D) $\frac{3}{2}$ E) 2



Helicodesafío

1. En el triángulo mostrado, determine

$$P = \sin \beta \cdot \sin \theta \cdot \csc^2 \alpha$$



- A) $\frac{ab}{cd}$ B) $\frac{ad}{bc}$ C) $\frac{bc}{ad}$
D) $\frac{ac}{bd}$ E) $\frac{bd}{ac}$

2. En un trapecio isósceles ABCD se inscribe una circunferencia de manera que las diagonales sean perpendiculares a los lados no paralelos del trapecio, siendo θ un ángulo de la base mayor. Determine

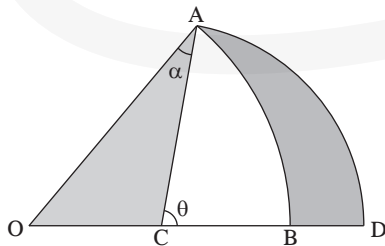
$$E = \sec \theta - \cos \theta$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) 2 E) 3

3. Si AOB y ACD son sectores circulares, determine

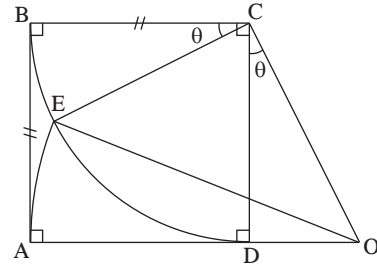
$$E = \frac{\sqrt{\theta - \alpha} \csc(\theta - \alpha) - \sqrt{\theta} \csc \theta}{\sqrt{\theta - \alpha} + \sqrt{\theta}}$$

si las regiones sombreadas son equivalentes.



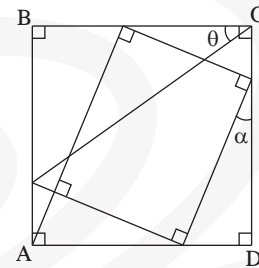
- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{3}$ E) 0

4. Calcule $\cot \theta$ si BCD y AOE son sectores circulares.



- A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

5. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado igual 1. Calcule $\tan \theta$ en términos de α .



- A) $\frac{1 + \tan^5 \alpha}{1 + \tan \alpha}$ B) $\frac{1 + \tan^6 \alpha}{1 + \tan \alpha}$ C) $\frac{1 + \tan^4 \alpha}{1 + \tan \alpha}$
D) $\frac{1 + \tan^8 \alpha}{1 + \tan \alpha}$ E) $\frac{1 + \tan^7 \alpha}{1 + \tan \alpha}$

ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES



Objetivos

- Conoce y trabaja con los diferentes tipos de ángulos horizontales y verticales relacionando cada uno de ellos, sabiendo relativamente la dirección de los diferentes tipos de problemas.
- Grafica correctamente los textos referidos a ángulos verticales y horizontales en el plano cartesiano o en el plano XYZ según sea el caso.



Sabías que...

Ángulo de planeo de un avión

La ciencia actual se basa en el método científico, que consiste en elaborar un modelo teórico del sistema que desea estudiarse para después compararlo con un resultado experimental que valide o desacredite dicho modelo, lo cual permite ampliar poco a poco el conocimiento en dicho campo de estudio. Para ilustrar este procedimiento que se lleva a cabo día a día en los laboratorios, en este artículo, vamos a analizar un sistema relativamente fácil de entender en el campo de la física de fluidos: el planeo de un avión.

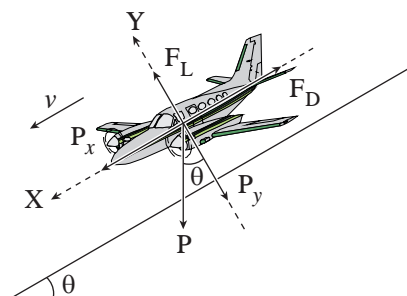
Marta Izquierdo, alumna de cuarto de Física de la Universidad Autónoma de Madrid nos trae este artículo sobre cómo modelizar un fenómeno físico (en este caso el planeo de un avión) y verificar su grado de ajuste a lo obtenido en los experimentos, en un ejemplo sencillo de lo que se lleva a cabo en la física cotidiana.

Para ello usaremos uno de porexpán, como el que se muestra a continuación, que simula en cuanto a su forma a un avión real.

Comenzamos desarrollando el marco teórico de lo que vamos a estudiar. Para llegar a las ecuaciones que describan de forma teórica el movimiento del avión al lanzarlo vamos a emplear la segunda ley de Newton, que nos dice que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a su masa por la aceleración que experimente.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Para facilitar la resolución de esta ecuación, usaremos un sistema de ejes coordenados en el que situamos el eje X paralelo a la superficie del avión y que forma un ángulo θ con la superficie terrestre, y el eje Y perpendicular al eje X, lo cual nos permitirá descomponer el movimiento del avión en estas dos direcciones, como se muestra a continuación:



Al proporcionar un impulso inicial al avión para ponerlo en movimiento, este experimentará las siguientes fuerzas:

- **Fuerza peso:** El campo gravitatorio terrestre g ejerce sobre el avión de masa m una fuerza P por el hecho de tener masa dirigida hacia el centro de la Tierra. Esta fuerza se puede descomponer en dos ejes según nuestro sistema de coordenadas.
- **Fuerza de arrastre:** Es la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento del avión por el hecho de que este se mueve en un fluido: el aire. Se encuentra, por lo tanto, dirigida a lo largo del eje X en el sentido contrario al movimiento. Para ello hay que tener en cuenta el coeficiente de arrastre C que depende de la forma del avión, ρ la densidad del aire y la velocidad del avión y S la superficie del ala.
- **Fuerza de sustentación:** Debido a la circulación del flujo alrededor del avión, dado que este se está moviendo, se produce esta fuerza en el eje Y dirigida hacia arriba, que será capaz de contrarrestar la fuerza, permitiendo el vuelo del avión.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$P_x = mg \sin \theta$$

$$P_y = mg \cos \theta$$

$$F_D = C \frac{1}{2} \rho v^2 S$$

$$F_L = \pi \rho v^2 l \sin \theta$$

Al aplicar la segunda ley de Newton en cada uno de los dos ejes, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Eje X: } \sum F_x = P_x - F_D = mg \sin \theta - C \frac{1}{2} \rho S v^2 = m a_x$$

$$\text{Eje Y: } \sum F_y = F_L - P_y = \pi \rho v^2 l \sin \theta - mg \cos \theta = m a_y$$

Durante el planeo del avión, este se encuentra en equilibrio, es decir, su aceleración es nula y su velocidad es una constante. Imponiendo esta condición a las ecuaciones anteriores podemos deducir que el avión no se mueve a lo largo del eje Y y, además, obtener la ecuación de movimiento del avión en el eje X

$$x(t) = \left(\sqrt{\frac{2mg \sin \theta}{C \rho S}} \right) t + x(0)$$

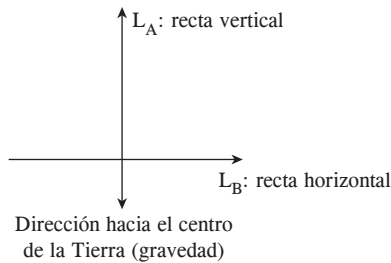
siendo la velocidad constante con la que se mueve el avión, la expresión que multiplica al tiempo y $x(0)$ la coordenada x del avión en el momento en el que inicia su planeo.

Ahora toca comprobar que nuestros cálculos teóricos son correctos. Experimentalmente nos podemos proponer hallar esta velocidad lanzando el avión y grabando su trayectoria con una cámara fijada a un trípode para poder obtener después las gráficas del movimiento del avión.

Tras lanzarlo numerosas veces, los casos más interesantes obtenidos fueron el del ángulo de planeo mínimo y el ángulo de planeo máximo que se registró.

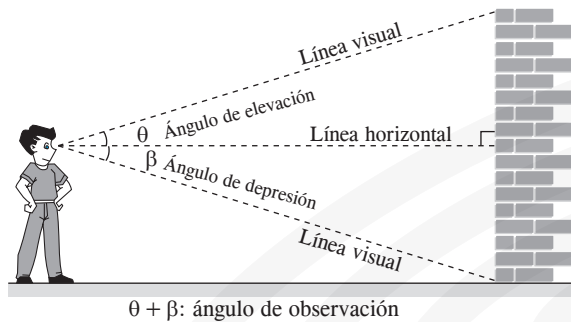
ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

En este capítulo se aplicará el tema de triángulos rectángulos notables y resolución de triángulos rectángulos, a lo cual se le incluye la teoría que estudiaremos a continuación.



Ángulos verticales

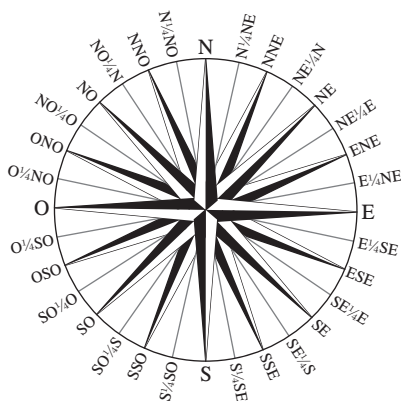
Los ángulos verticales son los ángulos agudos contenidos en un plano vertical, el cual contiene al observador y al objeto observado.



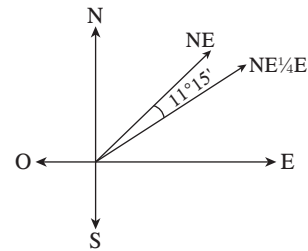
ÁNGULOS HORIZONTALES

Son aquellos ángulos que están contenidos en un plano horizontal.

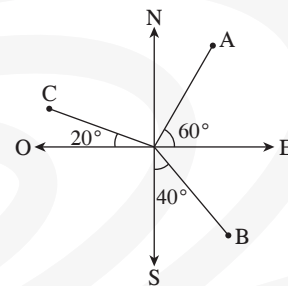
La rosa náutica o compás marino es la representación esquemática de la brújula náutica, la cual está dividida en 32 partes iguales, por lo tanto, cada parte es $360 \div 32 = 11^\circ 15'$. La figura muestra el nombre que se da a las diferentes direcciones. Los puntos norte, sur, este y oeste se llaman puntos cardinales y sobre el papel estas direcciones se toman generalmente hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente.



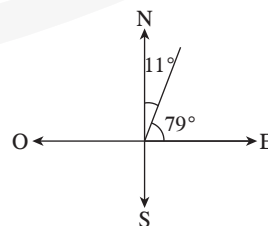
Ángulo formado por dos direcciones principales (consecutivas)



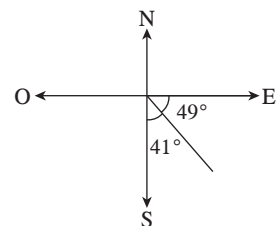
La dirección de un punto A con relación a un observador P puede darse de dos formas: el punto A se encuentra del este 60° hacia el norte ($E60^\circ N$) del punto P, o A se encuentra del norte 30° hacia este ($N30^\circ E$) del punto P. Análogamente, el punto B se encuentra en la dirección $S40^\circ E$ del punto P, o B se encuentra del Este 50° hacia el sur de P y C se encuentra en la dirección $O20^\circ N$ del punto P, o C se encuentra del norte 70° al oeste del punto P.



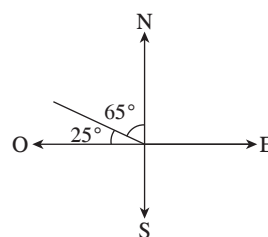
El rumbo es una dirección, la cual está dada como el ángulo entre la línea de dirección magnética Norte, Sur y la línea de dirección hacia el objeto. Se debe tener presente para este capítulo que no toda dirección es un rumbo, pero sí todo rumbo es una dirección.



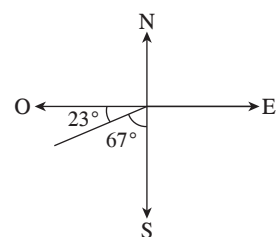
Rumbo $N11^\circ E$
o dirección $E79^\circ N$



Rumbo $S41^\circ E$
o dirección $E49^\circ S$



Rumbo $N65^\circ O$
o dirección $O25^\circ N$



Rumbo $S67^\circ O$
o dirección $O93^\circ S$



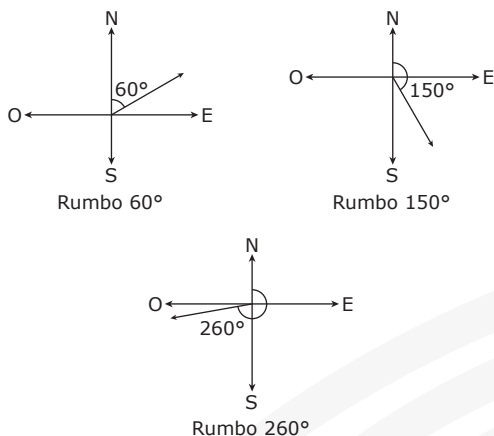
Anotación

Los rumbos N11°E, N65°O y S67°O pueden ser considerados como direcciones, en cambio, las direcciones E79°N, E49°S, O25°N y O23°S no son consideradas rumbos.



Observación

En náutica y en aeronáutica el rumbo se mide a partir del norte y con el sentido dirigido hacia el este, es decir, se mide un ángulo de 0° a 360° en sentido de las manecillas del reloj (en este caso se asigna una medida positiva al ángulo en lugar de la medida a la que no está acostumbrado para rotaciones en el sentido del reloj).

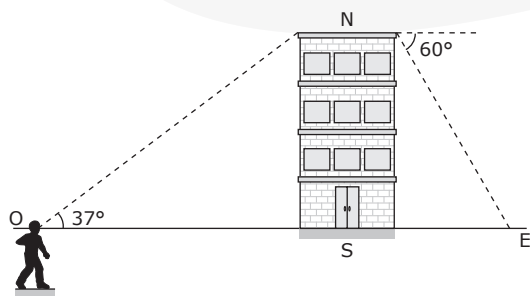


Observación

En algunos casos se graficará ángulos verticales y ángulos horizontales, según el problema.

Ejemplo

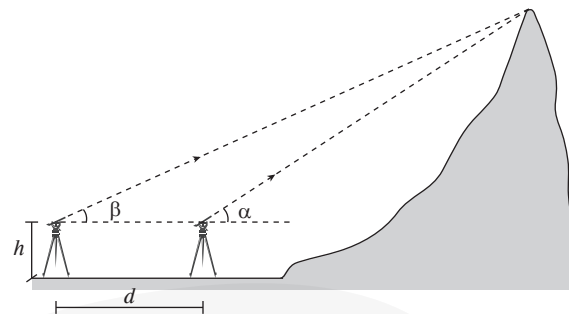
Se observa un edificio hacia el norte con ángulo de elevación de 37° (desde un punto A) y desde lo alto del mismo edificio se observa un punto en el suelo con ángulo de depresión de 60° hacia el este.



Ejemplo 1

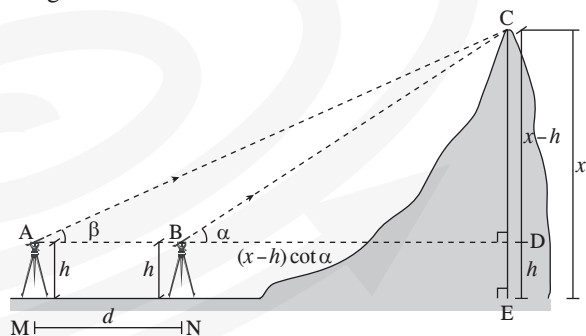
En la siguiente figura se desea calcular la altura de una montaña, para lo cual se utiliza un teodolito de h metros de longitud. Si en la primera posición el ángulo de elevación mide α y en la segunda posición el ángulo de elevación es β , y por último, d es la distancia en metros entre las posiciones del teodolito. Demuestre que la altura de la montaña es igual a

$$\frac{d}{\cot \beta - \cot \alpha} + h$$



Resolución

Sea x la longitud, en metros, de la altura de la montaña. Del gráfico tendremos



Por resolución de triángulos rectángulos

$$\triangle BDC: BD = (x - h) \cot \alpha$$

$$\triangle ADC: AD = (x - h) \cot \beta$$

Pero $AD = AB + BD$

$$(x - h) \cot \beta = d + (x - h) \cot \alpha$$

$$(x - h)(\cot \beta - \cot \alpha) = d$$

$$x - h = \frac{d}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

$$\therefore x = \frac{d}{\cot \beta - \cot \alpha} + h$$

Ejemplo 2

Desde un punto situado a 20 m sobre el nivel del piso, los ángulos de elevación y depresión de la parte más alta y baja de una torre son 30° y 37° , respectivamente. Halle la altura de la torre.

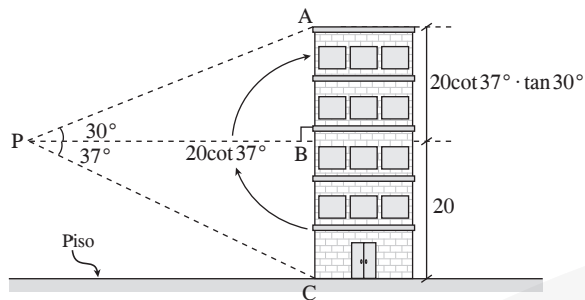
Resolución

En la figura siguiente, P se encuentra a 20 m sobre el nivel del piso. La longitud de la torre está dada por

$$AC = AB + BC$$

$$AC = AB + 20 \quad \dots(1)$$

Por resolución de triángulos rectángulos



$$\triangle CBP: PB = 20 \cot 37^\circ$$

$$\triangle PBA: AB = PB \tan 30^\circ$$

$$AB = 20 \cot 37^\circ \cdot \tan 30^\circ$$

$$AB = (20) \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$AB = \frac{80\sqrt{3}}{9}$$

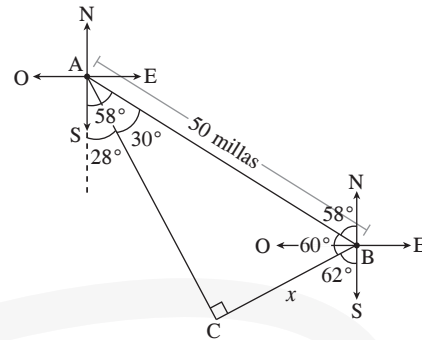
$$\text{En (1): } AC = \left(\frac{80\sqrt{3}}{9} + 20 \right) \text{ m}$$

Ejemplo 3

Dos ciudades, A y B, están separadas 50 millas una de la otra. La ciudad B está situada con respecto a la ciudad A, 58° al este del sur. Una tercera ciudad, C, se ve desde A en la dirección $S28^\circ E$ y desde la ciudad B en la dirección 62° al oeste del sur. Halle la distancia en millas de la ciudad B a la ciudad C.

Resolución

Planteado el enunciado del problema, tenemos el siguiente gráfico:



de donde

$$\triangle ACB \text{ es notable } (30^\circ \text{ y } 60^\circ)$$

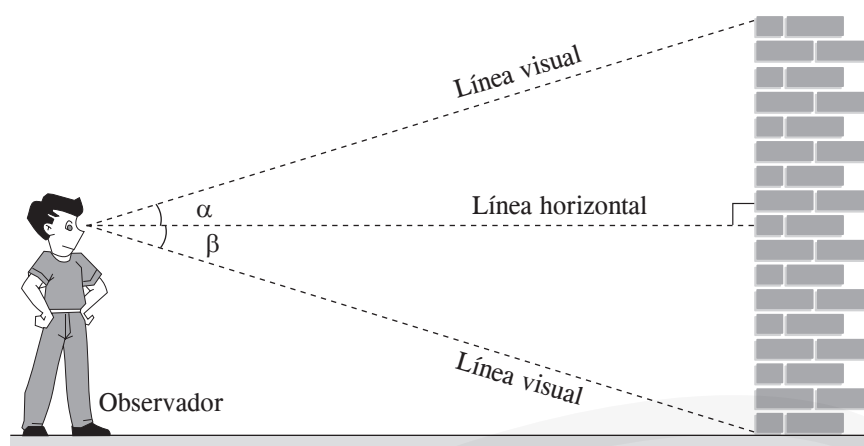
$$\rightarrow x = 25 \text{ millas}$$



Síntesis

LÍNEA HORIZONTAL

Es la línea recta paralela a la superficie horizontal referencial que pasa por el ojo del observador.

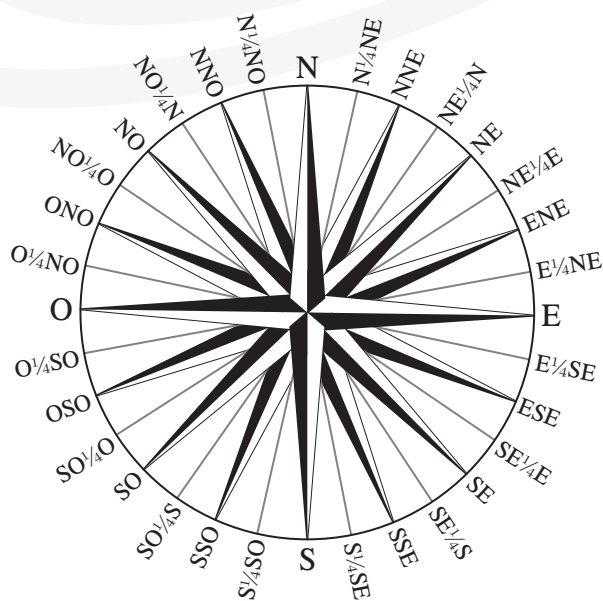


ÁNGULOS VERTICALES

Son aquellos ángulos obtenidos en un plano vertical formados por la línea visual y línea horizontal que parten de la vista del observador. Los ángulos verticales pueden ser:

- α : ángulo de elevación
- β : ángulo de depresión
- $\alpha + \beta$: ángulo de observación

ÁNGULOS HORIZONTALES



Rosa náutica



Problemas resueltos

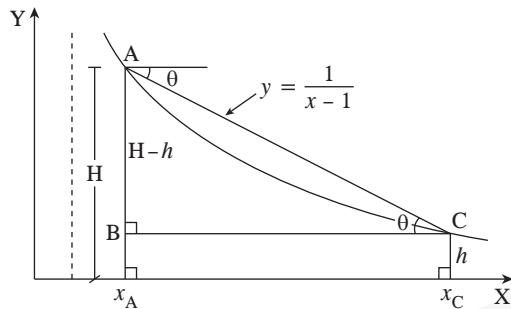
1. Un águila se encuentra a una altura H y ve a una liebre de altura h . Se lanza sobre la presa a lo largo del tramo de la trayectoria descrita por la gráfica de la función. (UNI 2014-I)

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, x > 1$$

llegando a su presa.

Determine la tangente del ángulo de depresión con el cual el águila vio al inicio a su presa.

Resolución



En los puntos A y C

$$y = \frac{1}{x-1} \rightarrow x = \frac{1}{y} + 1$$

Las abscisas son: $x_A = \frac{1}{H-h} + 1$

$$x_C = \frac{1}{h} + 1$$

En el $\triangle ABC$

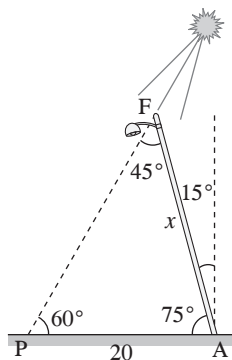
$$\tan \theta = \frac{H-h}{x_C - x_A} = \frac{H-h}{\frac{1}{h} - \frac{1}{H}}$$

$$\therefore \tan \theta = Hh$$

Rpta.: Hh

2. Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 60° , un poste inclinado en 15° desde la vertical proyecta una sombra de 20 m. Determine la longitud del poste. (UNI 2010-I)

Resolución



En el triángulo AFP, mediante el teorema de senos

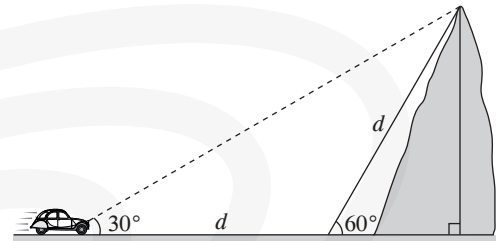
$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore x = 24,5 \text{ m}$$

Rpta.: 24,5 m

3. Un automovilista viaja en una carretera plana en dirección a una montaña a 60 km. En un instante observa la cima de la montaña con un ángulo de elevación de 30° y 10 minutos más tarde vuelve a observar la cima con un ángulo de elevación de 60° . Determine la distancia, en km, a la cima de la montaña cuando se encuentre en el segundo instante. (UNI 2006-II)

Resolución



$$t = 10 \text{ min}$$

$$v = 60 \text{ km/h}$$

$$d = vt$$

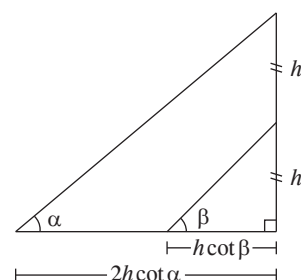
$$d = 60 \text{ km/h} \cdot \frac{1}{6} \text{ h}$$

$$d = 10 \text{ km}$$

Rpta.: 10 km

4. Dos puntos están ubicados en un mismo nivel del suelo. Desde uno de ellos se observa el extremo superior de un poste con un ángulo de elevación α y desde el otro punto se observa el punto medio del poste con un ángulo de elevación β . Si la suma de las distancias del poste a cada uno de los puntos es d , halle la altura del poste. (UNI 1998-II)

Resolución



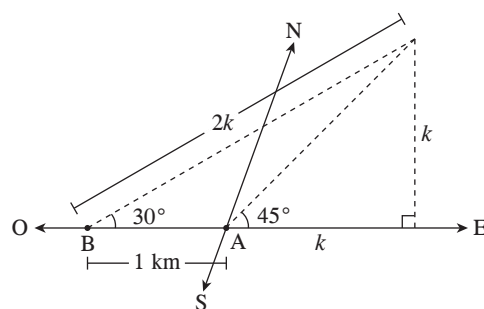
Del dato: $2h \cot \alpha + h \cot \beta = d$

$$2h = \frac{2d}{2 \cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\text{Rpta.: } \frac{2d}{2 \cot \alpha + \cot \beta}$$

5. Una persona localizada en A observa directamente al este y ve un ovni con un ángulo de elevación de 45° . En el mismo instante, otra persona localizada en B ve el mismo ovni con un ángulo de elevación de 30° . Determine la distancia, en km, de la persona localizada en B al ovni. (UNI 2001 - II)

Resolución



$$k + 1 = k\sqrt{3}$$

$$1 = k(\sqrt{3} - 1)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \rightarrow 2k = \frac{2}{(\sqrt{3} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)}$$

$$2k = \sqrt{3} + 1$$

$$2k = 1,73 + 1$$

$$2k = 2,73$$

Rpta.: 2,73



Helicopráctica

Nivel I

1. Una alumna observa la cima de una montaña bajo un ángulo de elevación de 30° . Después de avanzar 5 km hacia la montaña, el ángulo de elevación de la cima es de 45° . Determine la altura de la montaña.

Resolución

3. Juan camina 8 km en la dirección $S30^\circ O$ y Pedro camina 8 km en la dirección O . Si Pedro y Juan partieron del mismo punto, ¿a qué distancia se encuentran luego de sus caminatas?

Resolución

2. A medida que un globo se eleva verticalmente, la medida de su ángulo de elevación desde un punto P, en el suelo, situado a $3(\sqrt{3} + 1)$ m del punto Q, que está directamente bajo el globo, cambia de $\frac{37^\circ}{2}$ a 30° . Determine qué tanto se eleva el globo durante este periodo.

Resolución

4. Desde el centro de una circunferencia un móvil se desplaza en la dirección $E\theta N$ hasta llegar a la circunferencia de donde observa la parte más nórdica de la circunferencia en la dirección $N70^\circ O$. Halle el valor de θ .

Resolución

Nivel II

5. Una persona ubicada en el camino que forma un ángulo θ con la horizontal observa la parte más alta de una torre de longitud 20 m que está sobre el camino con un ángulo de elevación 2θ . Si nos acercamos a la torre una distancia de 40 m, el nuevo ángulo de elevación es 3θ . Calcule $\sin\theta$.

Resolución

7. Un observador que equidista de los pies de dos torres, observa sus cúspides con ángulos de elevación de 37° y 53° . Si la primera torre se ubica en la dirección NNE y la segunda en la dirección ESE, determine la diferencia de sus alturas sabiendo que la distancia que las separa es $120\sqrt{2}$ m.

Resolución

6. Un poste tiene más altura que otro. Un observador que está a $30\sqrt{3}$ m del poste pequeño, observa las partes más altas de ambos postes en una misma dirección con un ángulo de elevación de 30° . Determine la altura del poste menor y la distancia entre los postes.

Resolución

8. Desde un punto de un terreno horizontal se observa hacia el este un avión con un ángulo de elevación α y al cabo de cierto tiempo se le observa hacia el norte con un ángulo de elevación β . ¿Con qué pendiente se eleva el avión si $\tan\beta - \tan\alpha = 0,2$ y el avión se encuentra viajando al NO?

Resolución

Nivel III

9. Hay dos personas que se encuentran a uno y a otro lado de un poste; observa una de ellas la parte superior del poste con un ángulo de elevación θ y la otra observa su punto medio con un ángulo de elevación ϕ . Si la distancia entre ambas personas es a , halle la altura del poste.

Resolución

11. Dos embarcaciones parten de un puerto hacia el $N\alpha E$ y $S(90^\circ - \alpha)E$ a velocidad de 3 km/h y 4 km/h, respectivamente. Si al cabo de 2 horas la recta que une ambos barcos corta a la dirección este del puerto en el punto M, halle el valor de α para que la distancia del puerto al punto M sea mínima.

Resolución

10. Una persona observa un avión que se halla a cierta altura, con ángulo de elevación de 37° ; el avión se desplaza en dirección a la persona a una altura constante, con una velocidad de 180 km/h. Si luego de 1 minuto el piloto del avión observa a la persona con un ángulo de depresión de 45° , halle la altura a la cual se encuentra el avión.

Resolución

12. Dos barcos salen al mismo tiempo de un puerto con velocidades iguales, el primero se dirige al norte, en un instante dado desde él se observa a dos puntos A y B, ubicados en el mar, en las direcciones $S15^\circ O$ y $E60^\circ S$, respectivamente, en ese mismo instante, desde el otro barco que está al sur del puerto, se observa a los puntos A y B en las direcciones $N75^\circ O$ y $S75^\circ E$, respectivamente. Determine en qué dirección se encuentra el punto B respecto al punto A.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

- Desde un avión que está por aterrizar en el aeropuerto, se observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje al extremo más cercano con un ángulo de depresión de 60° y al extremo más alejado con un ángulo de depresión de 30° . Halle la longitud de la pista de aterrizaje si el avión se encuentra a $600\sqrt{3}$ m de altura.

Resolución

- Dos objetos son vistos exactamente en líneas rectas y en direcciones SO, pero desplazándose $2\sqrt{2}$ km, hacia el oeste los objetos son vistos en las direcciones SE y S, respectivamente. Halle, en km, la distancia que los separa.

Resolución

Nivel II

- Un vigía situado en la parte superior de una torre de vigilancia de $20\sqrt{3}$ m de altura, observa a dos personas en la misma dirección con ángulos de depresión de 30° y 60° , respectivamente. Halle la distancia que los separa. (No se considera la altura del vigía).

Resolución

- Un barco navega en la dirección $S30^\circ E$ y otro barco lo hace en la dirección $N30^\circ E$, en un instante dado el segundo barco se encuentra al norte del primero y a 60 km. Halle la separación del primero con respecto del punto A si ambos partieron simultáneamente de A.

Resolución

5. Una lancha sale de un puerto con movimiento rectilíneo en la dirección SE. Luego de un tiempo t de recorrido se desvía y continúa rectilíneamente por la dirección $N15^\circ O$ hasta equidistar del puerto y del punto de desvío. ¿En qué dirección se encuentra la lancha respecto del puerto?

Resolución

6. Dos árboles en posición vertical, de longitudes $(\sqrt{3} - 1)$ m y $(\sqrt{3} + 1)$ m y están separados una cierta distancia. Son observados desde un punto comprendido entre ambos árboles por una hormiga hacia sus partes más altas con ángulos de elevación θ y $(90^\circ - \theta)$, respectivamente. Si la distancia entre las partes más altas de los árboles es de $\sqrt{13}$ m, calcule $\cot \theta$.

Resolución

Nivel II

7. La elevación de la cumbre de una montaña vista desde un punto del suelo es 45° . Caminando desde dicho punto una distancia de 30 m en un plano horizontal en dirección a la cumbre y luego otros 260 m sobre un plano ascendente cuya inclinación tiene como cotangente 2,4 respecto a la horizontal, se encuentra que la elevación de la cumbre, vista desde esta última posición es de 53° . Halle la altura de la cumbre respecto de la última posición observada.

Resolución

8. Una paloma, en un instante de su vuelo, observa a otra paloma hacia el este con un ángulo de elevación de 37° y a un gusano en la dirección $S30^\circ E$ con un ángulo de depresión de 53° . Si la primera paloma equidista de la otra y del gusano, calcule la tangente del ángulo de depresión con el cual la segunda paloma ve al gusano.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Una persona observa la parte más alta de un poste con un ángulo de elevación de θ . Si avanza una distancia igual al doble de la altura del poste en dirección a este y lo observa con un ángulo de elevación α , calcule $\cot \theta - \cot \alpha$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) 2 E) $\frac{5}{2}$

2. Desde la parte superior de un edificio se observa un punto A en el suelo con un ángulo de depresión α . De otro punto, B, ubicado en el punto medio entre la base del edificio y el punto A, se observa la parte alta de una antena, que se encuentra en el extremo superior del edificio, con una elevación θ . Si el edificio es de altura h , determine la longitud de la antena.

A) $\frac{h}{2}(\cot \alpha \cdot \tan \theta - 2)$ B) $h \cot \alpha \cdot \tan \theta$
C) $h \tan \theta \cdot \cot \alpha + 1$ D) $h(\tan \alpha + \cot \theta)$
E) $h^2(\tan \theta - \cot \alpha)$

Nivel II

3. Desde un faro se observa a dos barcos, A y B, en las direcciones $N35^\circ O$ y $S55^\circ O$, respectivamente. En ese mismo instante B es observado desde A en la dirección $S25^\circ O$. Si la velocidad de A es de 24 km/h, la velocidad de B es de $24\sqrt{3}$ km/h y la distancia inicial de A al faro es de 5 km, halle la distancia entre A y B al cabo de una hora y 15 minutos.

A) 60 km B) $60\sqrt{3}$ km C) 70 km
D) 80 km E) $90\sqrt{3}$ km

4. Pepe desea ir a su colegio, que se encuentra al E θ S de él, pero primero va a la casa de María, situada a d metros de él en la dirección S θ O. Luego, ambos deciden ir al cine, situado a D metros al sur de ellos, para finalmente ir al colegio situado a x metros al este del cine. Determine el valor de x .

A) $D \tan \theta + d \sec \theta$ B) $D \cot \theta + d \csc \theta$
C) $D \sec \theta + d \tan \theta$ D) $D \csc \theta + d \cot \theta$
E) $D \csc \theta + d \sec \theta$

Nivel III

5. Sobre una carretera inclinada con un ángulo α respecto a la horizontal, un poste tiene una sombra de longitud d metros. Si en ese instante el ángulo de elevación del sol es 60° , determine la longitud del poste.

A) $2d \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ B) $2d \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$
C) $d \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ D) $d \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$
E) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$



Test 2

Nivel I

1. Para determinar la altura de una torre, un topógrafo mide una distancia d a partir de la base de la torre y en el extremo de dicha línea estaciona un teodolito. Nivel el lente y después dirige una visual a lo alto de la torre. Si el ángulo de elevación es θ y el lente se encuentra a una altura h sobre el suelo, determine la altura de la torre.

A) $d \tan \theta + h$ B) $d \cot \theta + h$
 C) $d \sin \theta - h$ D) $d \tan \theta - h$
 E) $d \cot \theta - h$

2. Un avión vuela horizontalmente y su piloto observa un objeto en tierra con un ángulo de depresión θ . A partir de ese instante se desplaza una distancia igual al triple de su altura y el ángulo de depresión en ese instante es el complemento de θ . Calcule $\cot^3 \theta - \tan^3 \theta$.

A) 30 B) 32 C) 34
 D) 36 E) 38

Nivel II

3. Juan observa la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación de 30° , se dirige hacia él caminando $4\sqrt{3}$ m y observa el mismo punto anterior con un ángulo de elevación de 45° . ¿Cuánto debe caminar en dirección al edificio para que el ángulo de elevación del mismo punto sea de 60° ?

A) 1 m B) 4 m C) 9 m
 D) 16 m E) 25 m

4. Una persona caminando hacia el NE observa una casa en la dirección $N15^\circ E$. Cuando han transcurrido 15 minutos la persona es observada desde la casa en dirección $S75^\circ E$ y a 250 m de distancia. Determine la velocidad de la persona.

A) 2 km/h B) 2,5 km/h C) 3 km/h
 D) 4 km/h E) 5 km/h

Nivel III

5. En el aeropuerto una persona observa el despegue de un avión que se eleva con una pendiente constante. La primera vez lo observa al NO con un ángulo de elevación de 30° y segundos después lo observa al norte a 200 m de altura y con un ángulo de elevación de 53° . ¿Con qué pendiente se eleva el avión? (El avión vuela en la dirección Oeste-Este).

A) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2 + \sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$
 D) $\frac{4 - \sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{4 - \sqrt{2}}{3}$



Helicodesafío

- El propietario de un terreno triangular construyó un muro de 40 metros de largo con dirección $S37^{\circ}O$ sobre una de las líneas limítrofes del terreno; los otros límites tienen dirección norte-sur y este-oeste. ¿Cuál es el área del terreno?
 A) 35 m^2 B) 360 m^2 C) 358 m^2
 D) 342 m^2 E) 384 m^2
- Un astronauta ubicado en la parte interna de un transbordador espacial observa por una de las ventanas a la Tierra, generando con ella un arco de 120° . Con la finalidad de explorar el espacio decide salir del transbordador y para ello desciende verticalmente a una cierta distancia, desde la cual observa nuevamente la Tierra bajo un ángulo de 90° . Halle la distancia de separación entre las dos posiciones de observación sabiendo que el radio terrestre es de 6370 km. (Considere $\sqrt{2} = 1,41$).
 A) 3600 km B) 3745 km
 C) 3758,30 km D) 3750,40 km
 E) 3760,50 km
- Un niño y dos árboles se encuentran en una misma línea. El niño, que está entre los árboles, observa las partes superiores de dichos árboles con ángulos de elevación α y 2α . Si se sabe que sus respectivas visuales miden 30 y 35 m, halle la altura del mayor árbol, teniendo en cuenta que si la distancia a la que se encuentra el niño de un árbol es igual a la altura del otro árbol y este último el que se opone a 2α . (Sugerencia: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$).
 A) $\frac{60}{7} \text{ m}$ B) $\frac{40}{7} \text{ m}$ C) $\frac{60\sqrt{10}}{7} \text{ m}$
 D) $\frac{50\sqrt{10}}{7} \text{ m}$ E) $\frac{45\sqrt{10}}{7} \text{ m}$
- Dos arcos, A y B, están separados 20 millas uno del otro. B está situado con respecto de A al $S80^{\circ}O$, un submarino C observa desde A en la dirección $S20^{\circ}O$ y desde B, en la dirección $S40^{\circ}E$. Halle la distancia del barco al submarino C.
 A) 20 millas B) 30 millas C) 40 millas
 D) 15 millas E) 15 millas
- Una persona, caminando hacia el NE observa una casa en la dirección $N15^{\circ}E$. Cuando han transcurrido 15 minutos, la persona es observada desde la casa en dirección $S75^{\circ}E$ y a 250 m de distancia. Determine la velocidad de la persona.
 A) 2 km/h B) 2,5 km/h C) 3 km/h
 D) 4 km/h E) 5 km/h

FÍSICA



FÍSICA

CINEMÁTICA I



Objetivos

- Describir el movimiento sin tener en cuenta las causas que lo originan.
- Interpretar los gráficos que describen el MRU.



Sabías que...

¿Qué velocidad máxima puede soportar el cuerpo humano viajando por el espacio?

El récord máximo de velocidad experimentado por un humano lleva 46 años manteniéndose: el trío de astronautas que voló en la misión Apolo 10 de la NASA en 1969 alcanzó los 39.897 kilómetros por hora. ¿Cuándo será superada esa cifra? Y una cuestión no menos importante, ¿existe algún límite más allá del cual nuestros órganos no podrían soportar la tensión?



“Los humanos estamos obsesionados con la velocidad. De hecho, ya hemos viajado muchas veces más rápido que Mach 5 (velocidad hipersónica) (...) pero podríamos superar ese registro relativamente pronto”, declara el columnista de la BBC Adam Hadhazy, quien cita al nuevo cohete de la NASA, el Space Launch System (SLS), que tiene previsto lanzar en 2018 la cápsula Orión, elemento con el que se puede sobrepasar el récord actual. Se prevé que la misma realice su primera misión tripulada en el año 2021.

Actualmente, los diseñadores pronostican que la velocidad máxima de Orión será cercana a los 32.000 kilómetros por hora. Sin embargo, Jim Bray, director del proyecto del módulo de la tripulación de la cápsula Orión para la firma aeroespacial Lockheed Martin, declara que “su velocidad podría ser mucho más alta de lo que planeamos ahora”. “Hace cien años, es probable que no hubiéramos imaginado a un humano viajando por el espacio a casi 40.000 kilómetros por hora”, indica.



Hace cerca de un siglo, la invención de robustos aviones que podían ser maniobrados a grandes velocidades hizo que numerosos pilotos reportaran extraños síntomas relacionados con la aceleración y los cambios de dirección, incluyendo la pérdida temporal de la visión y sensación de ingravidez. La causa de ello es la fuerza G, también llamada fuerza gravitacional, que hace referencia a la presión que ejerce la aceleración sobre el cuerpo humano en relación con la atracción gravitatoria de la Tierra.

Así, las fuerzas G experimentadas verticalmente, de arriba abajo o viceversa, son las que realmente podrían ser peligrosas para los pilotos y pasajeros (las fuerzas G negativas provocan la acumulación de sangre en la cabeza y las positivas, en los pies), pudiendo los cambios bruscos de aceleración causar desde simples desmayos hasta la muerte. Una persona promedio puede llegar a soportar una fuerza sostenida de 5 fuerzas G de pies a cabeza antes de caer inconsciente.

“Para el cuerpo humano, la constancia es buena. De lo hay que preocuparse es de la aceleración”, explica Bray. Una vez que una nave espacial alcanza una velocidad de crucero constante (alrededor de los 26.000 kilómetros por hora) en órbita, los astronautas tienen la misma sensación de velocidad que los pasajeros de un avión comercial.

¿A qué velocidad puede llegar el ser humano?

<https://www.youtube.com/watch?v=jGJE9y0awIg&t=229s>

¿Qué pasaría si viajamos a la velocidad de la luz?

<https://www.youtube.com/watch?v=RfcwvRYPOKs&t=509s>





CINEMÁTICA

Parte de la física que estudia el movimiento mecánico.

¿Qué es el movimiento mecánico?

Es el cambio de posición (lugar) de un cuerpo respecto a otro cuerpo denominado sistema de referencia (SR).

¿Qué es un sistema de referencia?

Es cualquier cuerpo o punto desde el cual se describe el movimiento. Puede ser una piedra, un punto, una persona, un insecto, entre otros.

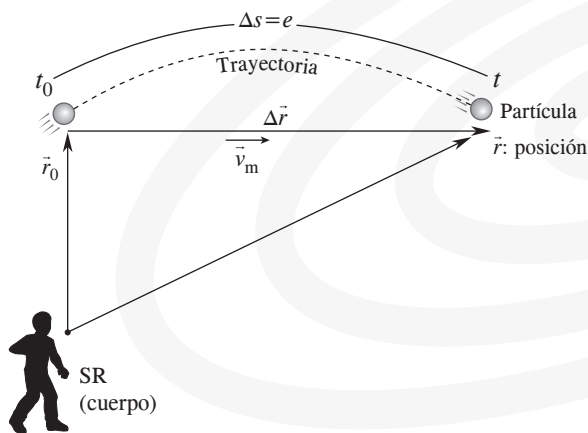


Anotación

El sistema de referencia es imprescindible para la descripción del movimiento.

El observador es quien realiza las mediciones en la descripción del movimiento para lo cual elige opcionalmente un sistema de coordenadas.

Cantidades cinemáticas



Anotación

Se denomina partícula al cuerpo que describe solamente movimiento de traslación.

1. Longitud de recorrido ($\Delta s = e$)
Medida longitudinal de la trayectoria, llamada también recorrido.
2. Desplazamiento ($\Delta \vec{r}$)
Cantidad física vectorial que mide el cambio de posición.
$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

 $\vec{r}$: posición final
 $\vec{r}_0$: posición inicial

3. Distancia ($|\Delta \vec{r}|$)

Cantidad física escalar que es el módulo del desplazamiento.

4. Velocidad ($\vec{v}$)

Cantidad física vectorial que mide la rapidez del cambio de posición.

4.1. Velocidad media ($\vec{v}_m$)

Nos indica qué tan rápido cambia la posición en un intervalo de tiempo.

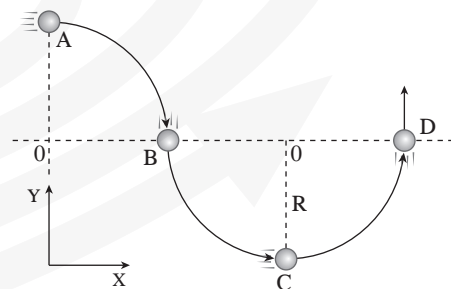
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\Delta t}$$

Unidades de medida: m/s

Tenga en cuenta: $\vec{v}_m \parallel \Delta \vec{r}$

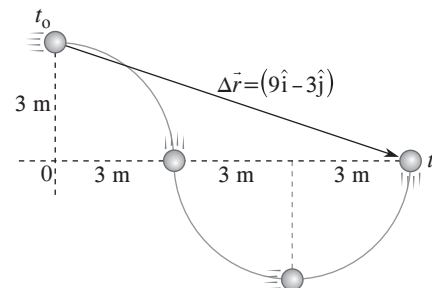
Ejemplo:

Una partícula recorre la trayectoria mostrada con rapidez constante. Si tarda 3 s en ir de A a D, determine su velocidad media, en m/s, para todo el recorrido. (Considere $R = 3$ m)



- A) $\hat{i} + \hat{j}$ B) $3\hat{i} + \hat{j}$ C) $\hat{i} - \hat{j}$
D) $3\hat{i} - \hat{j}$ E) $\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{3}}$

Resolución:



$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v}_m = \frac{9\hat{i} - 3\hat{j}}{3}$$

$$\therefore \vec{v}_m = (3\hat{i} - \hat{j}) \text{ m/s}$$

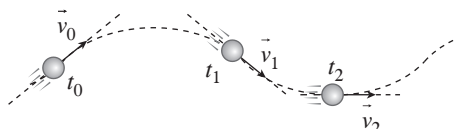
4.2. Velocidad instantánea ($\vec{v}$)

Nos indica la posible tendencia al cambio de posición en un intervalo de tiempo que tiende a cero (instante de tiempo).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)$$

Unidades
de medida: m/s

La velocidad ($\vec{v}$) es tangente a la trayectoria curva y nos indica hacia dónde tiende a irse.



Anotación

Al módulo de la velocidad instantánea se le denomina rapidez.

5. Rapidez media (v_m)

Cantidad física escalar que mide la rapidez del móvil cuando recorre la trayectoria.

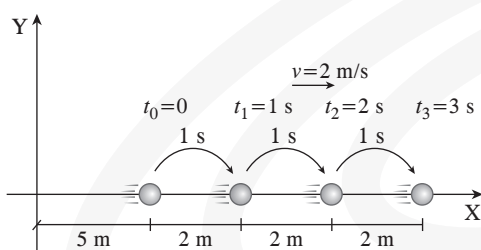
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Unidades
de medida: m/s

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

$$\vec{v} = \text{constante}$$

Veamos



Observamos:

- Trayectoria rectilínea
- En intervalos de tiempos iguales sus desplazamientos (hacia la derecha) son iguales.

Además $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{t_1 - t_0} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_2}{t_3 - t_2} = \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_0}{t_3 - t_0}$$

$$\frac{7\hat{i} - 5\hat{i}}{1 - 0} = \frac{9\hat{i} - 7\hat{i}}{2 - 1} = \frac{11\hat{i} - 9\hat{i}}{3 - 2} = \frac{11\hat{i} - 5\hat{i}}{3 - 0}$$

$$2\hat{i} = 2\hat{i} = 2\hat{i} = 2\hat{i}$$

$$\therefore \vec{v}_m = 2\hat{i} \text{ m/s}$$

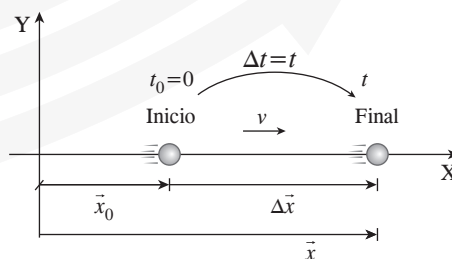
Es constante para cualquier intervalo de tiempo

¿Qué pasaría si $\Delta t \rightarrow 0$ (tiende a ser cero)?

$$\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{Instantánea} \\ \downarrow \\ \text{En un instante}}} = \underbrace{\vec{v}_m}_{\substack{\text{Media} \\ \downarrow \\ \text{En un intervalo de tiempo}}}$$

Tenga en cuenta en el ejemplo: en cada segundo se desplaza 2 m hacia la derecha.

En general:



Como $\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t - t_0}$

$$\rightarrow \boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}(t - t_0)}$$
 Ecuación del MRU

Tenga en cuenta: $\Delta \vec{x} = \vec{v}(t - t_0)$

Escalar

$$|\Delta \vec{x}| = |\vec{v}| \Delta t;$$

$$\Delta t = t$$

En forma práctica

$$\boxed{d = vt}$$

La distancia es igual a la rapidez por el tiempo

$$\begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline v \quad t \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo:

Una partícula se encuentra en $t_0 = 3$ s en la posición $\vec{r}_0 = (\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k})$ m y en $t = 8$ s en la posición $\vec{r} = (7\hat{i} - 5\hat{j} + 12\hat{k})$ m. Si el movimiento que realiza es un MRU, halle su desplazamiento, en m, entre $t_1 = 7$ s y $t_2 = 10$ s.

- A) $1,3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ B) $1,1\hat{i} + 1,4\hat{j} + 10\hat{k}$
 C) $3,6\hat{i} - 5,4\hat{j} + 1,8\hat{k}$ D) $1,5\hat{i} + 1,5\hat{j} + 5\hat{k}$
 E) $3,6\hat{i} + 10\hat{j} + 1,5\hat{k}$

Solución:

Datos: $t_0 = 3$ s $\rightarrow \vec{r}_0 = (\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k})$ m

$t = 8$ s $\rightarrow \vec{r} = (7\hat{i} - 5\hat{j} + 12\hat{k})$ m

MRU: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$
 $(7\hat{i} - 5\hat{j} + 12\hat{k}) = (\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}) + \vec{v}(8 - 3)$
 $\rightarrow 5\vec{v} = 6\hat{i} - 9\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{v} = \left(\frac{6\hat{i} - 9\hat{j} + 3\hat{k}}{5} \right) \text{ m/s}$$

Además: $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$

$$\Delta\vec{r} = \left[\left(\frac{6\hat{i} - 9\hat{j} + 3\hat{k}}{5} \right) \right] (10 - 7)$$

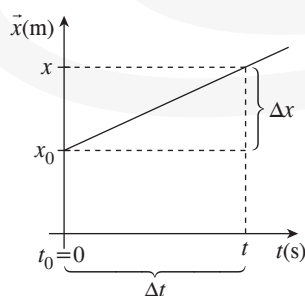
$$\Delta\vec{r} = (3,6\hat{i} - 5,4\hat{j} + 1,8\hat{k}) \text{ m}$$

GRÁFICAS EN EL MRU**A. Gráfica $\vec{x}$ vs. t**

De lo anterior

$$x(t) = x_0 + vt$$

Función lineal ↴



Considerando $\Delta t = t - t_0 = t$

se cumple:

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Entonces

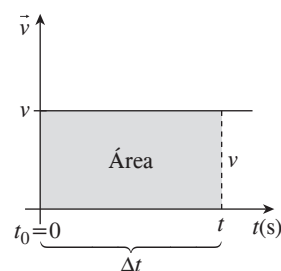
$$\vec{v} = \text{pendiente}$$

donde: Pendiente = $\begin{cases} (+): \text{Hacia la derecha} \\ (-): \text{Hacia la izquierda} \end{cases} \vec{v}$

B. Gráfica $\vec{v}$ vs. t

Como $\vec{v}$ es constante

Observe: área = $v\Delta t$



entonces $\Delta\vec{x} = \pm \text{área}$

donde

$$\Delta\vec{x} \begin{cases} (+): \text{Hacia la derecha} \rightarrow \vec{v}(+): (\rightarrow) \\ (-): \text{Hacia la izquierda} \rightarrow \vec{v}(-): (\leftarrow) \end{cases}$$

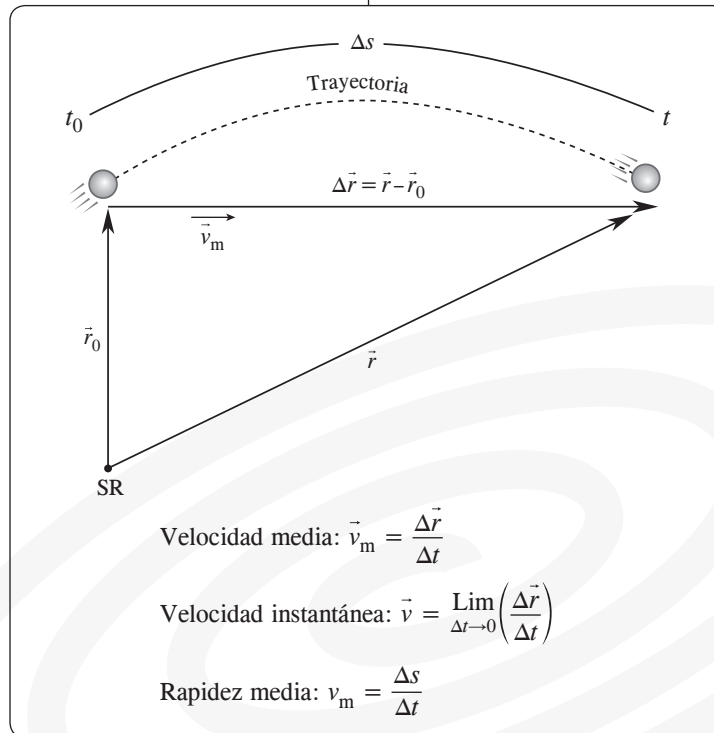


Helicósinthesis

CINEMÁTICA I

Sistema de referencia

Cantidades físicas



Velocidad constante

MRU

Características

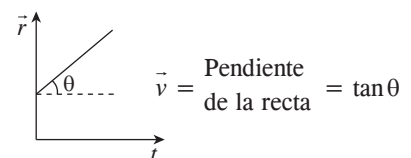
- Trayectoria rectilínea
- Recorridos iguales en intervalos de tiempos iguales
- Movimiento unidimensional

$$\vec{v} = \vec{v}_m$$

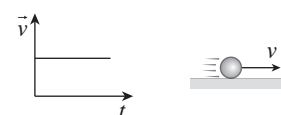
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{Constante}$$

Gráficas

➤ Posición - tiempo



➤ Velocidad - tiempo





Problemas resueltos

1. Respecto a los conceptos de cinemática, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

(CEPREUNI 2007-I)

- Para describir el movimiento de una partícula es imprescindible establecer tanto el tiempo de referencia como un sistema coordenado. ()
- Se denomina “observador” o sistema de referencia a la persona que mira cómo se mueve una partícula. ()
- Desde el punto de vista de la mecánica, se define partícula como un cuerpo de tamaño muy pequeño. ()

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) FFF

Resolución

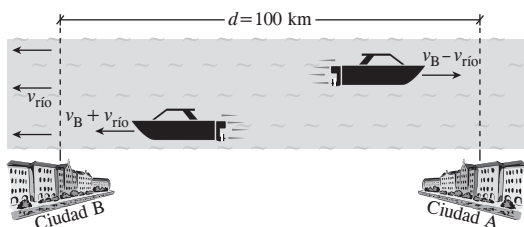
- El SR es un cuerpo que puede estar en reposo o en movimiento y es imprescindible para el análisis mientras que el sistema de coordenadas es opcional. (F)
- El SR es un cuerpo desde el cual se analiza el movimiento. No necesariamente tiene que ser una persona. (F)
- Partícula: cuerpo que describe movimiento de traslación. (F)

Rpta.: FFF

2. Dos ciudades situadas en las márgenes de un río se encuentran separadas 100 km. Un bote que hace el recorrido entre ellas tarda 5 h cuando va río arriba y 4 h cuando va río abajo. Si la rapidez de la corriente es la misma en ambos casos, calcule esta rapidez en km/h. (UNI 2016-II)

- A) 0,5 B) 1,5 C) 2,5
D) 3,5 E) 4,5

Resolución



Consideramos que v_B sea la rapidez del bote en el río.

Cuando va río arriba (en contra de la corriente del río), su rapidez respecto de la tierra será $v_B - v_{\text{río}}$ del MRU.

$$d = v \cdot t$$

$$d = (v_B - v_{\text{río}})t$$

$$100 \text{ km} = (v_B - v_{\text{río}})5 \text{ h}$$

$$20 \text{ km/h} = v_B - v_{\text{río}} \quad \dots \text{ (I)}$$

Cuando va río abajo (a favor de la corriente del río), su rapidez respecto de la tierra será $v_B + v_{\text{río}}$ del MRU.

$$d = v \cdot t$$

$$d = (v_B + v_{\text{río}})t$$

$$100 \text{ km} = (v_B + v_{\text{río}})4 \text{ h}$$

$$25 \text{ km/h} = v_B + v_{\text{río}} \quad \dots \text{ (II)}$$

Restando (II) y (I) obtenemos

$$5 = 2v_{\text{río}}$$

$$\therefore v_{\text{río}} = 2,5 \text{ km/h}$$

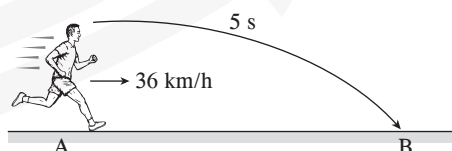
Rpta.: 2,5 km/h

3. Un atleta corre a lo largo de un camino recto con una rapidez de 36 km/h durante 5 s y después retorna con una rapidez de 18 km/h a su posición original. Calcule su rapidez media, en km/h. (UNI 2015-II)

- A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

Resolución

$$\text{Rapidez media} = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (*)$$



Recuerde:

$$v \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{5}{18} \right) = v \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

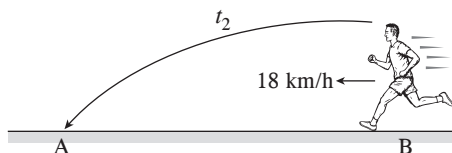
$$\text{Entonces: } v_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{5}{18} \right) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{5}{18} \right) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{En un MRU: } d_{AB} = v_1 \cdot t_1$$

$$d_{AB} = 10 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 50 \text{ m}$$

En el retorno también experimenta MRU.



$$d_{BA} = v_2 \cdot t_2$$

$$50 \text{ m} = 5 \text{ m/s} \times t_2$$

$$t_2 = 10 \text{ s}$$

La rapidez media para el intervalo de tiempo de ida y retorno.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{AB + BA}{t_1 + t_2}$$

$$v_m = \frac{50 \text{ m} + 50 \text{ m}}{5 \text{ s} + 10 \text{ s}}$$

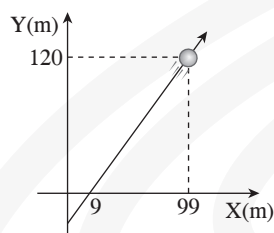
$$v_m = \frac{20 \text{ m}}{3 \text{ s}}$$

$$v_m = \frac{20}{3} \left(\frac{18}{5} \right) \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\therefore v_m = 24 \text{ km/h}$$

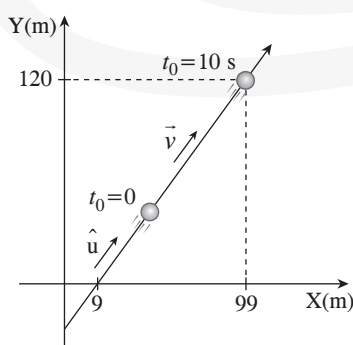
Rpta.: 24 km/h

4. La figura muestra la posición en el instante $t = 10 \text{ s}$ de un móvil en MRU. Si el móvil tiene una rapidez de 72 km/h, calcule su posición, en m, en el instante $t = 0$. (CEPREUNI 2013-II)



- A) $9\hat{i}$ B) $-12\hat{j}$ C) $21\hat{i} - 40\hat{j}$
D) $-9\hat{i} - 12\hat{j}$ E) $-32\hat{i} - 10\hat{j}$

Resolución



Dato: $|\vec{v}| = v = 72 \text{ km/h} < > 20 \text{ m/s}$

además:

$$\vec{v} = |\vec{v}|\hat{u}$$

Magnitud $\perp$ Orientación

Recuerde: $\hat{u} = \frac{\text{Vector}}{\text{Magnitud}} \rightarrow \hat{u} = \frac{90\hat{i} + 120\hat{j}}{150}$

$$\hat{u} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

Con lo cual

$$\vec{v} = 20 \left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j} \right) \rightarrow \vec{v} = (12\hat{i} + 16\hat{j}) \text{ m/s}$$

Del MRU: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$

En $t = 9$:

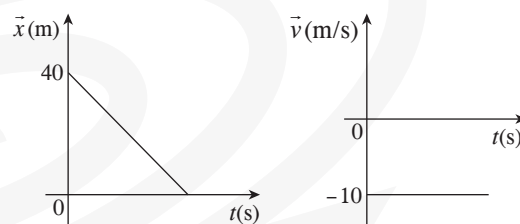
$$(99\hat{i} + 120\hat{j}) = \vec{r}_0 + (12\hat{i} + 16\hat{j})(10 - 0)$$

$$\therefore \vec{r}_0 = (-21\hat{i} - 40\hat{j}) \text{ m}$$

Rpta.: $(-21\hat{i} - 40\hat{j}) \text{ m}$

5. Las gráficas siguientes muestran la posición y velocidad de un móvil en función del tiempo. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.
(CEPREUNI 2007-I)

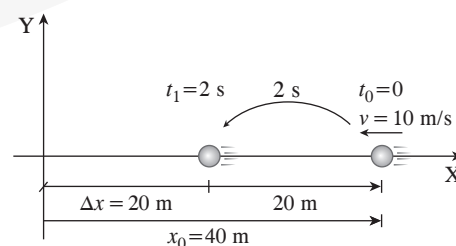
- I. La posición del móvil en $t = 2 \text{ s}$ es $20\hat{i} \text{ m}$. ()
II. La longitud recorrida por el móvil en los primeros dos segundos es 20 m. ()
III. El desplazamiento realizado por el móvil desde $t = 2 \text{ s}$ hasta $t = 4 \text{ s}$ es $20\hat{i} \text{ m}$. ()



- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) FFF

Resolución

De los datos de la gráfica



$$\text{MRU: } \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}(t - t_0) \rightarrow \vec{x} = 40 - 10t$$

$$\downarrow$$

$$\text{I. En } t_1 = 2 \text{ s} \rightarrow \vec{x}_1 = 40 - 10(2) \quad (\text{V})$$

$$\therefore \vec{x}_1 = 20\hat{i} \text{ m}$$

$$\text{II. Del gráfico: } |\Delta \vec{x}| = e = 20 \text{ m} \quad (\text{V})$$

$$\text{III. } \Delta \vec{x} = \vec{v} \Delta t \quad \Delta t \{2 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}\} \quad (\text{F})$$

$$\Delta \vec{x} = -10\hat{i}(4 - 2)$$

$$\Delta \vec{x} = -20\hat{i}$$

Rpta.: VVF



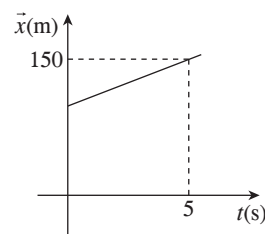
Helicopráctica

Nivel I

1. Sobre cantidades cinemáticas, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda. (Sustente)
 - a. Para definir las cantidades cinemáticas necesariamente se requiere de un sistema de coordenadas. ()
 - b. La velocidad media siempre es tangente a la trayectoria. ()
 - c. La rapidez media es módulo de la velocidad media. ()

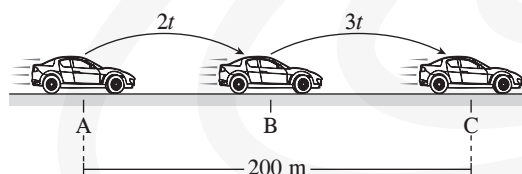
Resolución

3. La figura ilustra cómo varía en el tiempo la posición de una partícula que se mueve a razón de 10 m/s. ¿A qué distancia, en m, del origen se encontraba inicialmente el móvil?



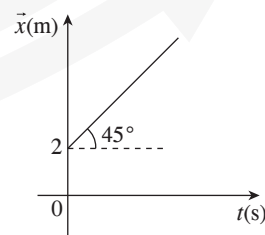
Resolución

2. El automóvil mostrado realiza MRU. Determine la distancia entre A y B.



Resolución

4. Se muestra la gráfica $x - t$ para un móvil con MRU. Determine su rapidez y posición en el instante $t = 10$ s.

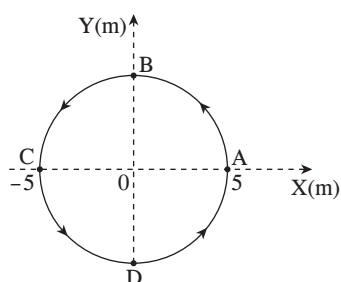


Resolución

Nivel II

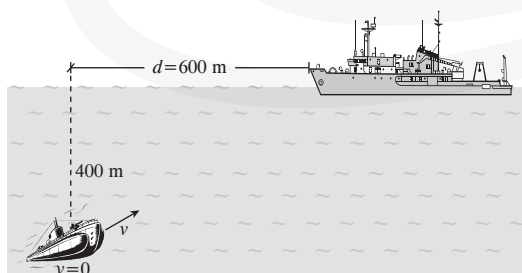
5. En la figura se muestra la trayectoria circular que sigue una partícula, con rapidez constante de 5 m/s. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda. (Sustente)

- La velocidad media entre A y B tiene la dirección $(-\hat{i} + \hat{j})$. ()
- El módulo del desplazamiento entre A y D es $5\sqrt{2}$ m. ()
- La velocidad media $\vec{v}_m$ entre A y C tiene la dirección del vector $-\hat{i}$. ()



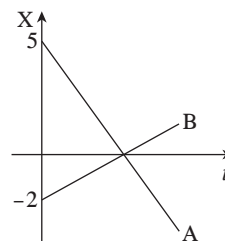
Resolución

6. Un submarino divisa a un buque que se desplaza con MRU. Si en el instante mostrado, el submarino lanza un torpedo, el cual se moverá con velocidad constante de 25 m/s y luego de 20 s impacta con el buque, determine la rapidez de este.



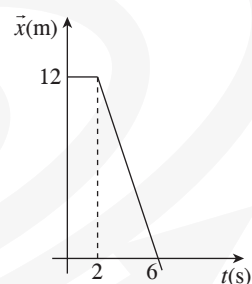
Resolución

7. Se muestra la gráfica X vs t de dos partículas que realizan movimiento rectilíneo. Si el tiempo que transcurre desde que se cruzan hasta que las partículas estén separadas 14 m es 6 s, determine la ecuación del movimiento del móvil B.



Resolución

8. Con la gráfica posición-tiempo, que se muestra para un cuerpo, indique la proposición incorrecta. (Sustente)

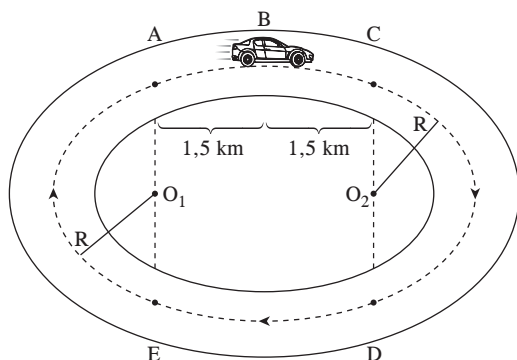


- En el instante $t = 1$ s, la velocidad del cuerpo es nula.
- En el instante $t = 4$ s, el cuerpo se está dirigiendo hacia la izquierda.
- En el instante $t = 5$ s, el cuerpo se encuentra a la derecha del origen de coordenadas.
- En el instante $t = 6$ s, el cuerpo está pasando por el origen de coordenadas.
- Entre $[2; 6]$ s, el cuerpo desarrolla un MRU con rapidez de 2 m/s.

Resolución

Nivel III

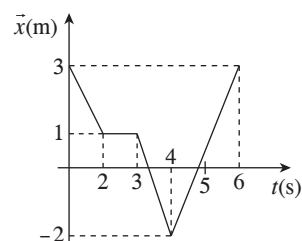
9. El auto de la figura describe la trayectoria que se muestra respecto a Tierra. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Considere O_1 y O_2 dos puntos fijos a tierra. (Sustente)



- El vector posición del auto cuando pasa por el punto B es el mismo para O_1 y O_2 . ()
- El desplazamiento del auto desde A hasta E, medido por O_1 es igual al medido por O_2 . ()
- Si el intervalo de tiempo en ir de $A \rightarrow C$ es igual que el de $D \rightarrow E$, entonces, la velocidad media de $A \rightarrow C$ es igual que la velocidad media de $D \rightarrow E$. ()

Resolución

10. La figura muestra el gráfico posición versus tiempo de una partícula que se mueve a lo largo del eje X.

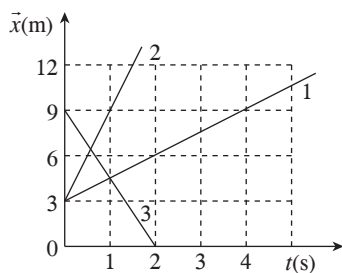


Marque la afirmación correcta. (Sustente)

- La velocidad de la partícula en los intervalos $0 \leq t \leq 2$ s y $3 \leq t \leq 4$ s es la misma.
- El desplazamiento de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s es +1 m.
- En ningún momento del recorrido la velocidad de la partícula es negativa.
- La velocidad de la partícula en el intervalo $4 \leq t \leq 6$ s es +3 m/s.
- El desplazamiento de la partícula entre los instantes $t = 2$ s y $t = 6$ s es +2 m.

Resolución

11. En la gráfica mostrada se muestra la dependencia de la coordenada x de tres cuerpos.



Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
(Sustente)

- La rapidez del móvil 2 es el doble que la del móvil 1. ()
- El móvil 3 recorre en 1 s la misma distancia que el móvil 1. ()
- La rapidez del móvil 2 es menor que la rapidez del móvil 3. ()

Resolución

12. Con el objeto de medir la velocidad con la que avanza un tren de 100 m de longitud, un automovilista que avanza en el mismo sentido a 75 km/h lo sobrepasa, midiendo que el tiempo que tarda para pasar de la cola a la cabeza del tren es de 10 s, la velocidad del tren, en km/h, es

Resolución



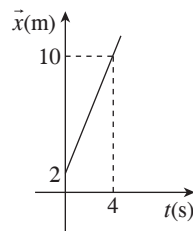
Helicotaller

Nivel I

- Una partícula experimenta un movimiento rectilíneo de ida y vuelta entre dos puntos, A y B. En la ida su rapidez media es de 20 m/s y en la vuelta es de 30 m/s. Determine su rapidez media para todo el movimiento, en m/s.

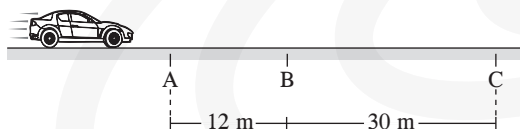
Resolución

- La gráfica describe el movimiento del auto. Determine su rapidez.



Resolución

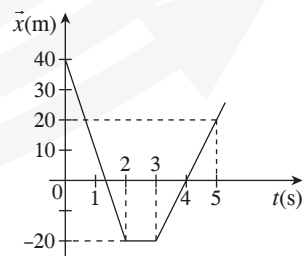
- El vehículo mostrado emplea 6 s más en recorrer el tramo BC que el tramo AB. Si realiza un MRU, determine la rapidez del vehículo.



Resolución

Nivel II

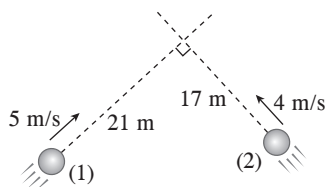
- Para un bloque en movimiento rectilíneo a lo largo del eje x se describe la posición x en función del tiempo gráficamente. Señale lo incorrecto.



- La velocidad inicial es $-30\hat{i}$ m/s.
- La velocidad en el instante $t = 5$ s es $20\hat{i}$ m/s.
- La rapidez media es 20 m/s hasta $t = 5$ s.
- La velocidad media hasta $t = 5$ s es $-5\hat{i}$ m/s.
- Está en reposo durante un segundo.

Resolución

5. Si las partículas 1 y 2 realizan un MRU, determine la separación entre ambas luego de 5 s.



Resolución

6. Los móviles A y B se trasladan horizontalmente y las ecuaciones de su movimiento son las siguientes:

$$\vec{x}_A = [4t] \text{ m}$$

$$\vec{x}_B = [12 - 2t] \text{ m}$$

t se expresa en segundos

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

(Sustente)

- Inicialmente están separados 12 m. ()
- Ambos móviles desarrollan MRU. ()
- Ambos móviles se trasladan hacia la derecha. ()
- El encuentro de los móviles ocurre en el instante $t = 2$ s y en la posición +8 m. ()

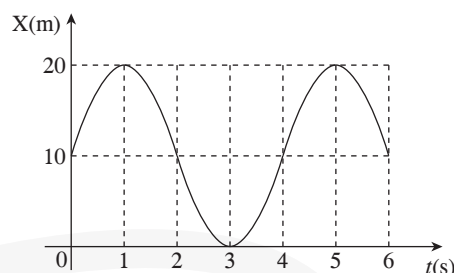
Resolución

Nivel III

7. En el gráfico se muestra el movimiento de una partícula en el eje X.

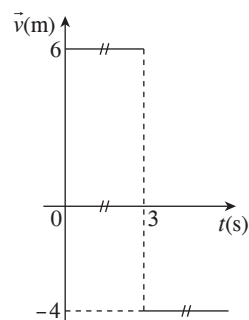
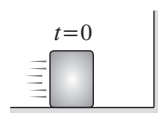
Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- La rapidez media entre $t = 0$ s y $t = 4$ s es 10 m/s. ()
- La orientación de la velocidad media entre $t = 2,5$ s y $t = 4,5$ s es $+\hat{i}$. ()
- La velocidad media entre $t = 0$ s y $t = 3$ s es $-10\hat{i}$ m/s. ()



Resolución

8. El móvil que se muestra impacta frontalmente contra la pared y su velocidad varía de acuerdo a la gráfica. Si se desprecia el tiempo del impacto, determine el recorrido, la distancia y la velocidad media para el intervalo de $[0; 6]$ s.



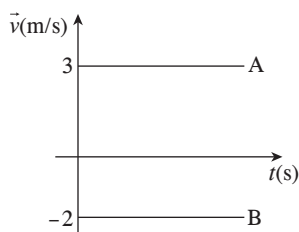
Resolución



Test 1

Nivel I

1. Dos móviles se mueven sobre la misma recta con las velocidades representadas en la siguiente gráfica. Si se encuentran en el instante $t = 4$ s, ¿qué distancia, en m, los separaba en $t = 0$ s?



- A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

2. El auto describe un MRU, de modo que desde A hasta B emplea el triple de tiempo que desde B hasta C. Determine su recorrido desde A hasta C. Considere $AB = BC + 30$ m.



A B C

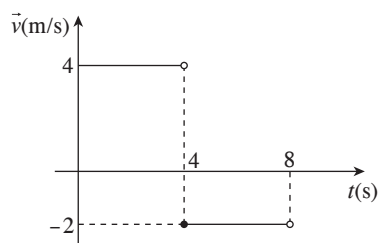
- A) 15 m B) 30 m C) 45 m
D) 60 m E) 75 m

Nivel II

3. Una partícula se mueve con velocidad constante de $20\hat{i}$ m/s, pasó por $\vec{x} = -10\hat{i}$ m en el instante $t = 0$ s. Calcule el desplazamiento entre $t = 4$ s y $t = 10$ s.

- A) $120\hat{i}$ m B) $100\hat{i}$ m C) $80\hat{i}$ m
D) $60\hat{i}$ m E) $40\hat{i}$ m

4. Un automóvil que se desplaza sobre una pista horizontal tiene una velocidad que se indica en la gráfica mostrada. Determine la distancia y el recorrido del automóvil en el intervalo comprendido entre $t = 0$ y $t = 8$ s.



- A) 24 m; 8 m B) 24 m; 24 m C) 8 m; 8 m
D) 8 m; 24 m E) 24 m; 16 m

Nivel III

5. Desde las posiciones $\vec{r}_1 = 6\hat{i}$ m y $\vec{r}_2 = 2\hat{j}$ m parten simultáneamente dos automóviles con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ constantes. Si $\vec{v}_1 = 4\hat{j}$ m/s, determine $\vec{v}_2$ para que los vehículos se encuentren en el punto localizado con $\vec{r} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ m.

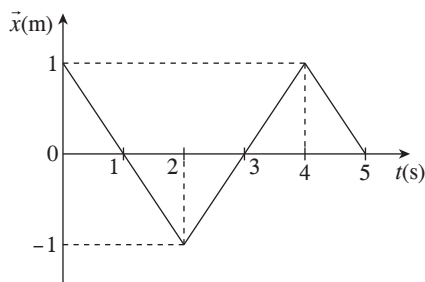
- A) $3\hat{i} + 3\hat{j}$ B) $3\sqrt{2}\hat{i} + \hat{j}$ C) $2\hat{i} + 2\hat{j}$
D) $2\sqrt{2}\hat{i} + 2\hat{j}$ E) $\frac{3}{\sqrt{2}}\hat{i} + 2\hat{j}$



Test 2

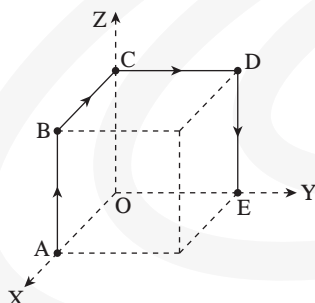
Nivel I

1. En la gráfica se muestra la dependencia con respecto al tiempo de la posición de un móvil que se desplaza a lo largo del eje x . Determine, en m/s, la magnitud de la velocidad media v_x y la rapidez media en los primeros 5 s de su movimiento.



- A) 0 y 1 B) 0,1 y 1 C) 0,2 y 0
D) 0,2 y 1 E) 0,1 y 0

2. La figura muestra un cubo de 10 m de arista. Una partícula sigue la trayectoria ABCDE empleando 10 s. Determine su velocidad media y su rapidez media, en m/s.

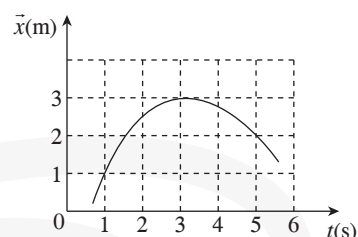


- A) $\hat{i} + \hat{j}$; 2 B) $2\hat{i} + \hat{j}$; 6 C) $\hat{i} + 2\hat{j}$; 4
D) $-\hat{i} + \hat{j}$; 4 E) $\hat{i} - \hat{j}$; 8

Nivel II

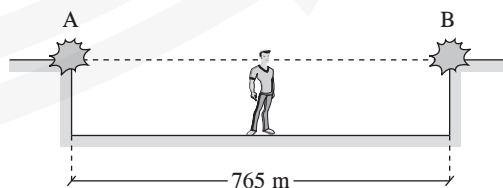
3. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x , según la gráfica mostrada. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- La distancia recorrida entre los tiempos $t = 1$ s y $t = 5$ s es 1 m. ()
- El desplazamiento de la partícula en el intervalo $t = 1$ s y $t = 5$ s es +2 m. ()
- La velocidad media en el mismo intervalo es +0,2 m/s. ()



- A) VVF B) FVV C) FFV
D) VFF E) FFF

4. En B ocurre una explosión después de t segundos de haber ocurrido otra en A. Si la persona escucha simultáneamente ambas explosiones luego de 1 s de producida la explosión en B, determine t . Considere que la rapidez del sonido es 340 m/s.



- A) 0,125 s B) 0,25 s C) 0,315 s
D) 0,425 s E) 0,5 s

Nivel III

5. Una partícula desarrolla un MRU tal que en $t = 3$ s pasa por la posición $\vec{r}_3 = (-12\hat{i} - 15\hat{j} + 6\hat{k})$ m y en $t = 9$ s pasa por la posición $\vec{r}_9 = (48\hat{i} + 3\hat{j} + 66\hat{k})$ m. Determine la posición, en m, en el instante $t = 8$ s.

- A) $5\hat{i} + 2\hat{j} + 66\hat{k}$ B) $18\hat{i} + 12\hat{j} + 16\hat{k}$
C) $18\hat{i} + 56\hat{k}$ D) $36\hat{i} + 24\hat{j} + 12\hat{k}$
E) $38\hat{i} + 56\hat{k}$



Helicodesafío

- La posición de una partícula en función del tiempo está dada por

$$x(t) = [(t + 1)\hat{i} + (2t^2 - 1)\hat{j}]$$
 donde x está en metros y t en segundos. Determine la velocidad media, en m/s, entre los instantes $t = 1$ s y $t = 3$ s.

A) $2\hat{i} + 7\hat{j}$ B) $\hat{i} + 8\hat{j}$ C) $6\hat{i} + 8\hat{j}$
 D) $3\hat{i} + 9\hat{j}$ E) $3\hat{i} - 4\hat{j}$
- Dos puntos sobre una pista rectilínea se encuentran separados L km. Un auto va de A hasta B con una velocidad constante de módulo 50 km/h; al llegar a B, el conductor revisa su auto demorándose la tercera parte del tiempo que demora en regresar hacia A con una rapidez v , entonces, para que la rapidez media desde que partió hasta que regresa a la posición A sea de 60 km/h, el valor de v , en km/h, debe ser

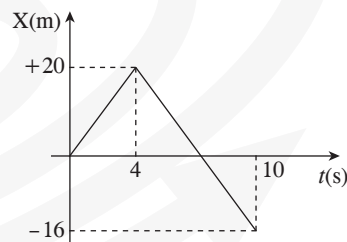
A) 70. B) 75. C) 80.
 D) 85. E) 90.
- La posición de una partícula en el instante $t_1 = 1$ s es

$$\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ m}$$
 y en el instante $t_2 = 3$ s es

$$\vec{r}_2 = (4\hat{i} + 7\hat{j} + 10\hat{k}) \text{ m}$$
 Si la partícula realiza MRU, determine su posición en el instante $t_3 = 10$ s.

A) $\vec{r}_{10} = (11\hat{i} + 21\hat{j} + 31\hat{k}) \text{ m}$
 B) $\vec{r}_{10} = (10\hat{i} + 19\hat{j} + 29\hat{k}) \text{ m}$
 C) $\vec{r}_{10} = (12\hat{i} + 23\hat{j} + 34\hat{k}) \text{ m}$
 D) $\vec{r}_{10} = (9\hat{i} + 17\hat{j} + 27\hat{k}) \text{ m}$
 E) $\vec{r}_{10} = (14\hat{i} + 27\hat{j} + 40\hat{k}) \text{ m}$
- Un auto se desplaza con rapidez constante de 20 m/s sobre una pista rectilínea. En el instante que el conductor se percata que un perro está parado en el medio de la pista, toca su bocina durante 17 s. ¿Durante cuántos segundos el perro escucha el sonido? ($v_{\text{sonido}} = 340$ m/s)

A) 1,2 s B) 1,5 s C) 1,6 s
 D) 1,7 s E) 1,8 s
- La gráfica adjunta corresponde a un auto que viaja a lo largo del eje X. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.
 - La velocidad del auto en el instante $t = 2$ s es $+5\hat{i}$ m/s. ()
 - La velocidad del auto en el instante $t = 8$ s es $-6\hat{i}$ m/s. ()
 - Desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s, la rapidez media del auto es 5,6 m/s. ()



- A) VFV B) FFV C) FVF
 D) VVV E) FFF

CINEMÁTICA II



Objetivos

- Conoce y reconoce cuando un móvil presenta aceleración.
- Describe las condiciones de un MRUV.
- Describe las gráficas del movimiento de un móvil con MRUV.



Sabías que...

Está acelerándose el tiempo

Nosotros escuchamos a la gente decir cosas como, “Yo nunca parezco tener suficiente tiempo ya para hacerlo todo” o “¿Hacia dónde se ha ido el tiempo?”.

Los años sin duda van volando más rápido que nunca y hay una razón científica del por qué el tiempo se está acelerando.

También hay una serie de razones de por qué estamos cambiando tan rápidamente y todo está relacionado con que el tiempo se está acelerando. Los seres humanos son cada vez más conscientes y las personas están siendo atraídas hacia la espiritualidad y hacia el desarrollo personal en mayor número que nunca antes.

¿Por qué está sucediendo esto?

Los científicos descubrieron hace muchos años que la Tierra emite un pulso. Este pulso o frecuencia, que ha sido comparada con un latido del corazón se ha mantenido estable en aproximadamente 7,8 ciclos por segundo durante miles de años.

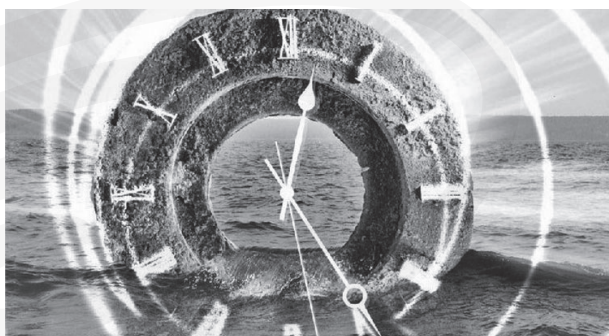
Sin embargo, desde alrededor del año 1980, los latidos del corazón de la Tierra comenzaron a acelerarse. Lo más increíble es que algunos científicos creen que la Tierra realmente dejará de girar cuando este pulso llegue a 13 ciclos por segundo.

Es debido a este aumento de la frecuencia del pulso que nosotros sentimos como si el tiempo se está acelerando. ¿Por qué “sentimos” como si el tiempo se está moviendo más rápido de lo que solía moverse? La razón es que lo que una vez fue percibido como un periodo de 24 horas, ahora se siente como que fueran 16 horas.

Nuestros relojes todavía se mueven en segundos, minutos y horas y aún así el reloj sigue caminando sobre un día completo en 24 horas, pero debido al aumento de los latidos del corazón de la Tierra, nosotros percibimos como que es solo dos tercios de largo, o un periodo de percepción de meras 16 horas cuando la Tierra detenga su rotación.

¿El tiempo se está acelerando?

https://www.youtube.com/watch?v=i_3FcDMxs2k



Cada vez con más frecuencia las personas están sugiriendo que el tiempo se está acelerando.



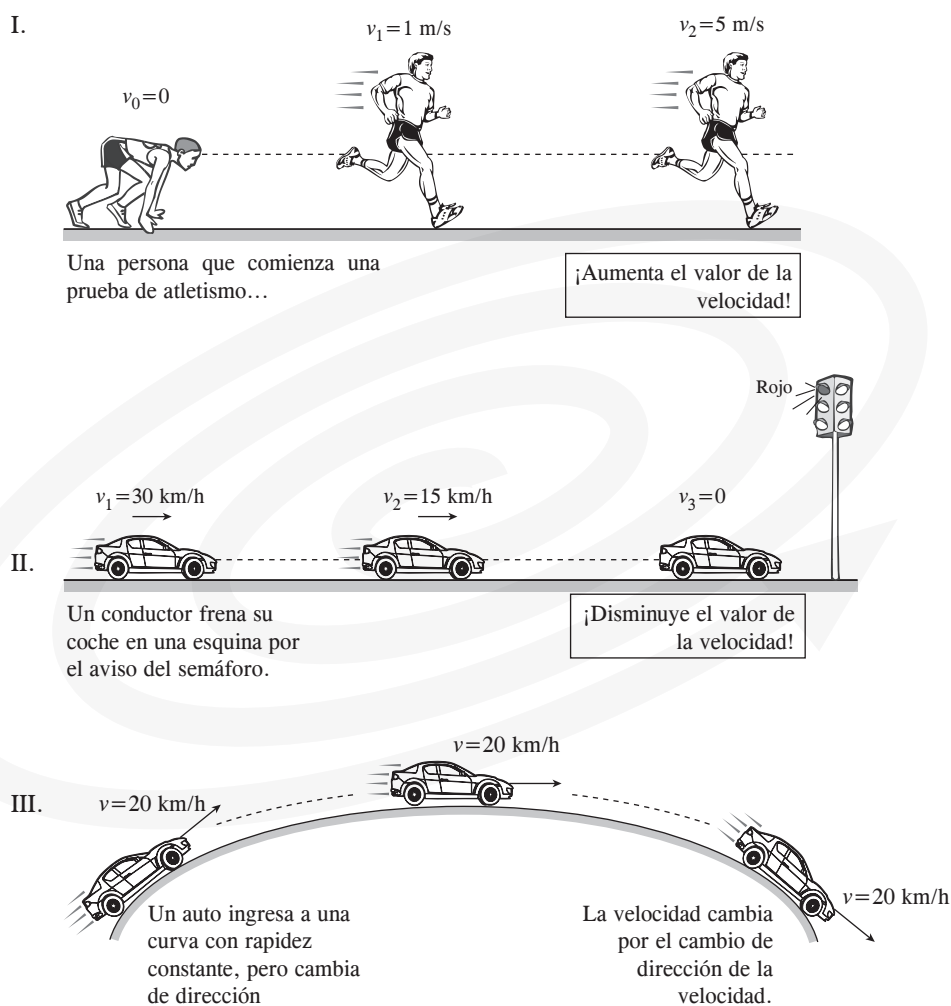


MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

LA ACELERACIÓN ($\vec{a}$)

En el capítulo anterior se discutió situaciones en donde una persona puede caminar o trotar en línea recta con rapidez constante durante cierto tiempo. Ahora, recordemos lo que nos ocurre u ocurrió cuando trotamos. ¿Mantenemos un trayecto recto?, ¿conservamos la rapidez con la que avanzamos? Las respuestas las podemos comentar en clase.

Cuando cualquiera de nosotros se pone a contemplar el movimiento de los diferentes cuerpos que están alrededor nuestro, habrá notado que algunos siguen trayecto curvo y otros, trayecto recto. También se observa que algunos cuerpos parten del reposo y otros comienzan a detenerse; en otras palabras, unos cuerpos aumentan o disminuyen su velocidad; la velocidad de los cuerpos cambia a medida que pasa el tiempo.

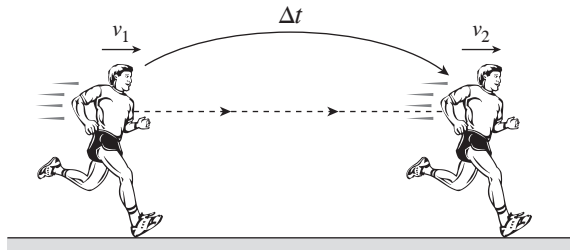


En las situaciones donde un móvil varía su velocidad, aumenta o disminuye su magnitud (módulo), surge en ocasiones poder establecer cómo fue aumentando la velocidad en cada segundo que ha transcurrido. La aceleración (media) es aquella cantidad física vectorial que permite establecer cómo se han dado o se darán los cambios de la velocidad de un cuerpo en movimiento.

Aceleración media

Se define como la rapidez de cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \text{ m/s}$$



Donde: $\Delta \vec{v}$: cambio o variación de velocidad, en m/s
 Δt : intervalo de tiempo, en s.

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

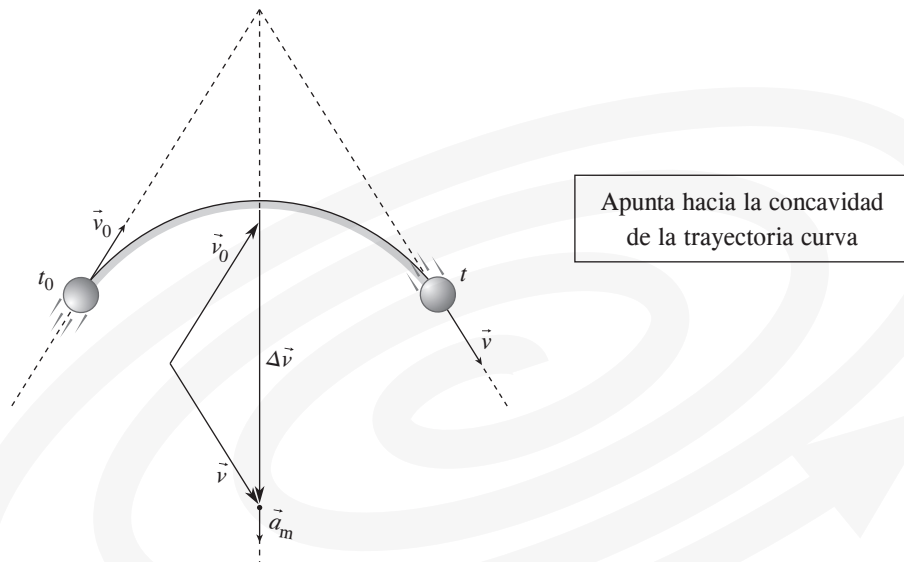


Anotación

Tenga presente que la $\vec{v}_2$ corresponde al instante de tiempo t_2 y la $\vec{v}_1$ corresponde al instante t_1 .

EN GENERAL

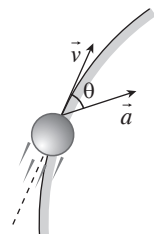
Tenga en cuenta: $\vec{a}_m \parallel \Delta \vec{v}$



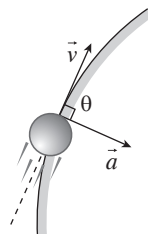
* Aceleración instantánea ($\vec{a}$)

Nos indica la tendencia al cambio de la velocidad en un instante de tiempo.

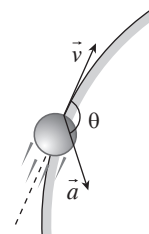
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) \quad \text{m/s}^2$$



Movimiento
acelerado



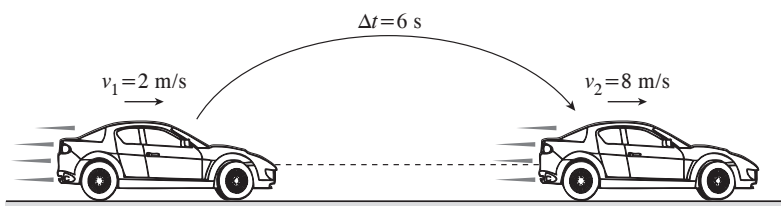
Movimiento
uniforme



Movimiento
desacelerado

Ejemplo 1

Para la situación mostrada, determine la aceleración (media).



Según el diagrama: $\vec{v}_1 = +2 \text{ m/s}$ y $\vec{v}_2 = +8 \text{ m/s}$

$$\rightarrow \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

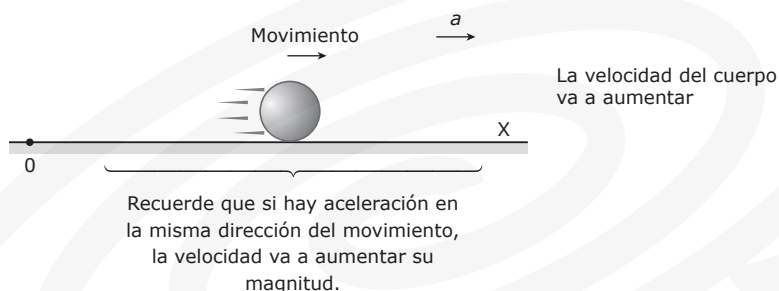
$$\rightarrow \vec{a}_m = \frac{(+8 \text{ m/s}) - (+2 \text{ m/s})}{6 \text{ s}} = +1 \text{ m/s}^2$$

Indica que la aceleración está dirigida a la derecha



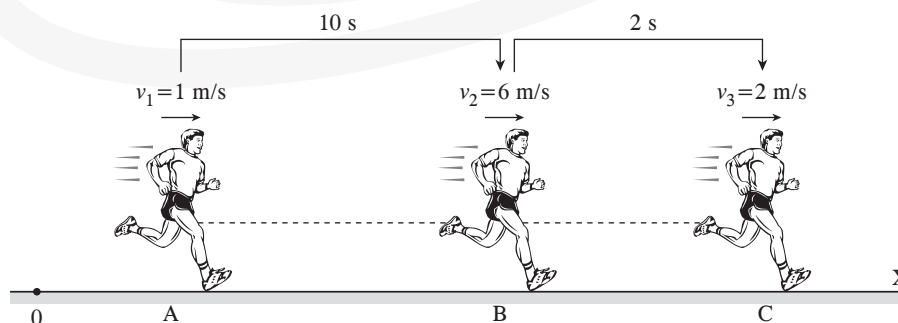
Anotación

Según el resultado del ejemplo anterior, podemos concluir que si un cuerpo se mueve sobre el eje X hacia la derecha aumentando su velocidad, la aceleración que tiene también está dirigida a la derecha.



Ejemplo 2

Un cuerpo se mueve sobre el eje X, como se indica en el dibujo. Determine la aceleración media en el tramo AB y en el tramo BC.



Tramo AB: $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{(+6 \text{ m/s}) - (+1 \text{ m/s})}{10 \text{ s}} = +0,5 \text{ m/s}^2$

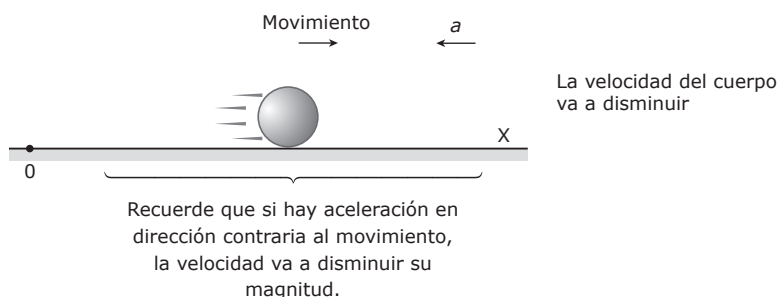
Dirigido a la derecha

Tramo BC: $\vec{a} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{\Delta t} = \frac{(+2 \text{ m/s}) - (+6 \text{ m/s})}{2 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}^2$

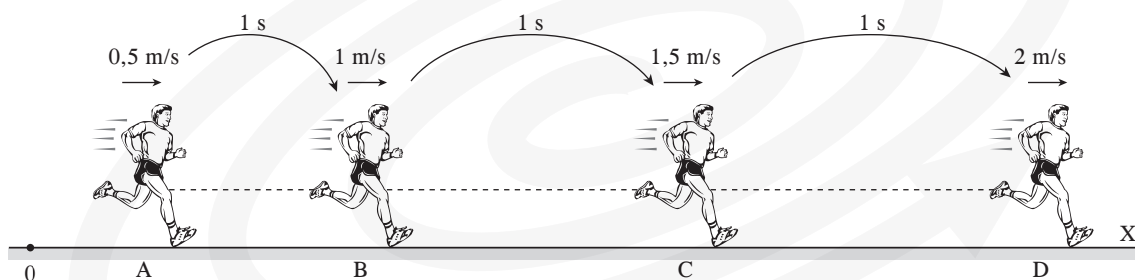
Dirigido a la izquierda

**Anotación**

El segundo resultado del ejemplo anterior permite establecer un aspecto importante. Mientras un cuerpo se mueve sobre el eje X hacia la derecha disminuyendo su velocidad, la aceleración que tiene está dirigida hacia la izquierda.

**MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)**

Cuando resolvimos el ejemplo número dos calculamos la aceleración (media) en dos tramos distintos y se obtuvo resultados diferentes. La aceleración en el tramo AB y en el tramo BC tenían magnitudes y direcciones diferentes. ¿Se podrá tener el caso de un cuerpo que se mueve y en cualquier tramo que se le evalúe su aceleración se obtenga el mismo resultado? Eso implicaría que su aceleración (media) no varía de un tramo a otro; equivale decir que la aceleración (media) es constante. Esto último es la característica de un movimiento en línea recta conocido como movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV).



Del diagrama anterior se puede demostrar que en cualquiera de los tramos la aceleración (media) resulta ser $+0,5 \text{ m/s}^2$; se entiende que está dirigida a la derecha y que su magnitud nos indica, en este caso, el aumento de la velocidad en $0,5 \text{ m/s}$ en cada segundo que transcurre.

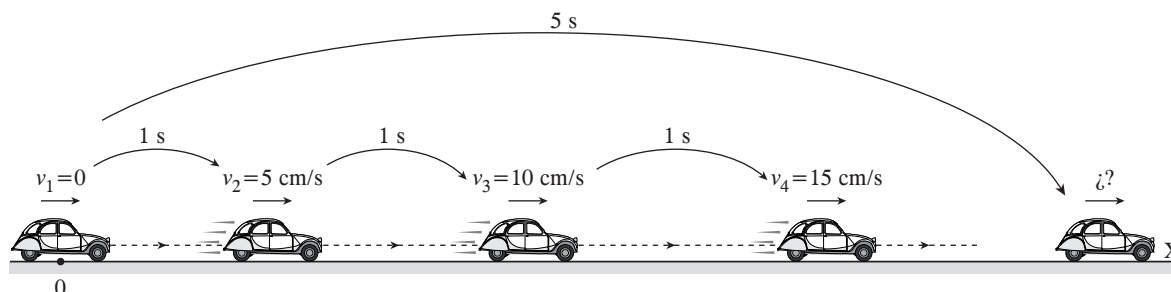
**Anotación**

En un MRUV, donde aumenta la velocidad (movimiento acelerado), la aceleración se debe dibujar en la dirección del movimiento y su magnitud nos indica cómo aumenta la velocidad en cada segundo que transcurra. En el caso de un MRUV donde disminuye la velocidad (movimiento desacelerado), la aceleración se debe dibujar en contra de la dirección del movimiento y su magnitud indica cómo disminuye la velocidad en cada segundo.

Ejemplo 3

Un carro que se maneja a control remoto está en reposo en el origen del eje X. Comienza a moverse con una aceleración constante de $+5 \text{ cm/s}^2$. ¿Qué velocidad tendrá al cabo de 5 segundos?

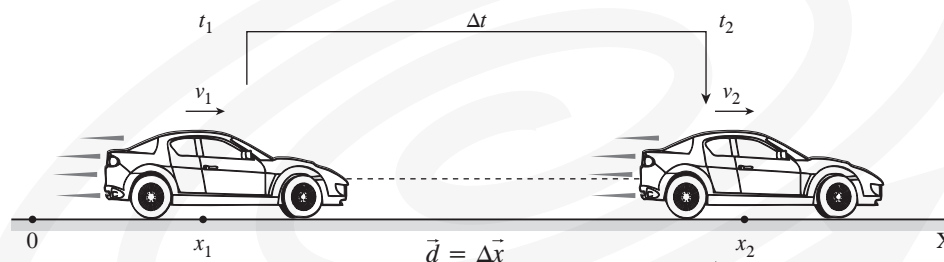
Según el dato de la aceleración, se concluye que el carro comenzará a moverse hacia la derecha del eje X y aumentará su velocidad en 5 cm/s en cada segundo que transcurra. En un diagrama podemos tener:



Se puede entender que pasados los 5 s, desde que partió el carro, su velocidad será $\vec{v}_5 = +25 \text{ cm/s}$. Si en este mismo ejemplo nos piden calcular los desplazamientos o posiciones, ¿qué debemos emplear para poder obtenerlos?

ECUACIONES DEL MRUV

Cuando un cuerpo o partícula se mueve sobre el eje X con una aceleración (media) constante, para poder calcular las cantidades cinemáticas tales como posición ($\vec{x}$), desplazamientos ($\vec{d}$), velocidad ($\vec{v}$) y aceleración ($\vec{a}$) se pueden emplear las siguientes ecuaciones:



Primera ecuación	$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}\Delta t$
Segunda ecuación	$\vec{v}_2^2 = \vec{v}_1^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{d}$
Tercera ecuación	$\vec{d} = \vec{v}_1\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(\Delta t)^2$
Ecuación auxiliar	$\vec{d} = \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\right)\Delta t$

Son las ecuaciones vectoriales del MRUV. Por convención se considera dirección a la

- Derecha: signo positivo
- Izquierda: signo negativo

En el caso que se calcule

- $\Delta t \rightarrow \Delta t = t_2 - t_1$
- $\vec{d} \rightarrow \vec{d} = \Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

**Anotación**

Cuando en un ejercicio se emplean las ecuaciones vectoriales presentadas, con la convención de signos respectiva, los cálculos en muchos casos resultan ser más simplificados. Es muy probable que el estudiante conozca o ya está familiarizado con las ecuaciones escalares de este movimiento. Discuta y comente en clase con sus compañeros cómo se emplean las ecuaciones escalares en los ejercicios.

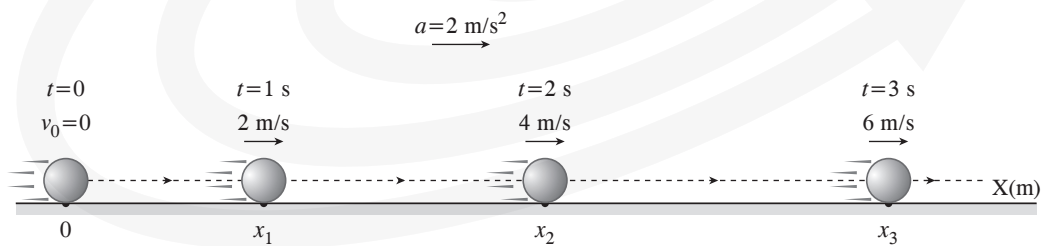
GRÁFICAS DEL MRUV

Como se vio en el capítulo anterior, para el MRU se construyeron dos gráficas de movimiento, posición versus tiempo y velocidad versus tiempo. En este caso podemos elaborar tres gráficas. A las anteriores se les añade la gráfica aceleración versus tiempo. Se puede elaborar las gráficas a partir de las ecuaciones vectoriales dadas en una tabla. Se recomienda revisar dicha tabla y dar unas condiciones iniciales de posición, velocidad y aceleración.

$$\begin{aligned}
 &\text{➤ } \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}\Delta t \\
 &\text{➤ } \Delta \vec{x} = \vec{v}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \Delta t^2 \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \Delta t = \underbrace{t_2}_{\text{Instante final } t} - \underbrace{t_1}_{\text{Instante inicial cero}} = t - 0 = t \end{array} \right. \\
 \\
 &\text{➤ } \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}t \\
 &\text{➤ } \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{v}_1 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Se cambia el índice (1) por (0) indicando valor inicial y el índice (2) se quita y se sobreentiende que es el valor para el instante de tiempo } t \text{ o valor final.} \end{array} \right. \\
 \\
 &\text{➤ } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\
 &\text{➤ } \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\
 &\left\{ \begin{array}{l} (\beta) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Esta presentación nos permite formar las gráficas velocidad y posición versus el tiempo.

Consideremos una partícula que está sobre el eje X y tiene las siguientes condiciones iniciales: $t_1 = 0$, $\vec{x}_0 = 0$ m, $\vec{v}_0 = 0$ m/s y $\vec{a} = +2$ m/s². Ello significa que la partícula parte del reposo desde el origen del eje X hacia la derecha, aumentando su velocidad en 2 m/s en cada segundo. Un esquema sería

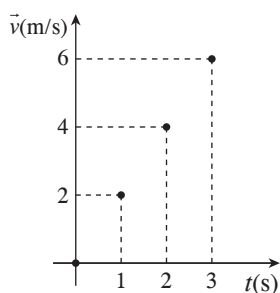


En las ecuaciones dadas por β reemplazamos las condiciones iniciales y se obtiene

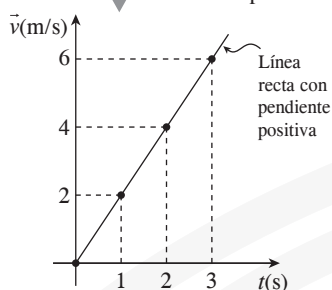
$$\begin{aligned}
 &\text{➤ } \vec{v} = 2t \text{ m/s} \\
 &\text{➤ } \vec{x} = t^2 \text{ m} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Empezamos a dar valores al tiempo } (t > 0) \text{ y obtenemos valores para la velocidad y posición.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$t(s)$	0	1	2	5	...
$\vec{v}(m/s)$	0	2	4	6	...

Par ordenado
Un punto en el
sistema velocidad vs. tiempo

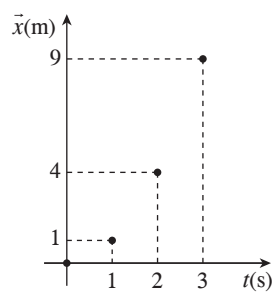


Se unen los puntos

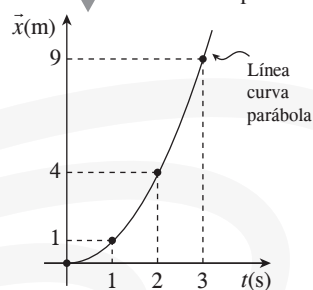


$t(s)$	0	1	2	3	...
$\vec{x}(m)$	0	1	4	9	...

Par ordenado
Un punto en el
sistema posición vs. tiempo



Se unen los puntos



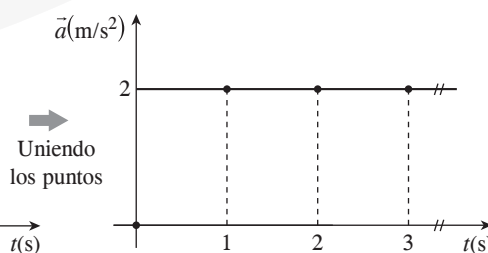
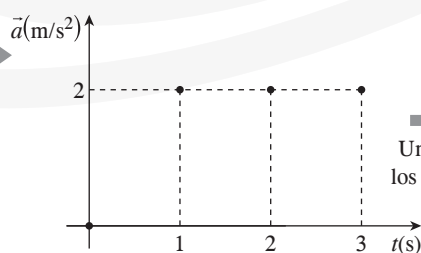
Anotación

En el MRUV, la gráfica velocidad versus tiempo es una línea recta con cierta pendiente (positiva o negativa) y la gráfica de la posición versus tiempo es una parábola (ramas hacia arriba o hacia abajo).

Con respecto a la aceleración de la partícula $\vec{a} = +2 \text{ m/s}^2$, esta es constante, es la misma para cualquier instante de tiempo.

$t(s)$	0	1	2	3	...
$\vec{a}(m/s^2)$	2	2	2	2	...

Par ordenado
Un punto en el
sistema aceleración vs. tiempo



Se forma una línea recta
paralela al eje de tiempo.

Después de formar las tres gráficas más usadas del MRUV, se concluye que

- Velocidad versus tiempo: Línea recta con pendiente.
- Posición versus tiempo: Es una parábola.
- Aceleración versus tiempo: Línea recta paralela al eje de tiempo.

Para la clase

En clase discutir qué información cinemática se puede obtener de cada una de las gráficas formadas, es decir, detalles geométricos como pendientes o áreas. ¿Qué información valiosa se puede rescatar?



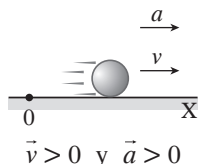
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

Características

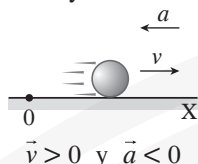
- Trayecto en línea recta.
- Aceleración constante.
- Acelerado o desacelerado.
- La velocidad varía uniformemente con el tiempo.
- En el caso acelerado mantiene la dirección de movimiento.
- En el caso desacelerado puede invertir la dirección del movimiento.

Casos

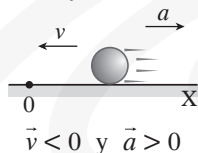
Aumenta la velocidad



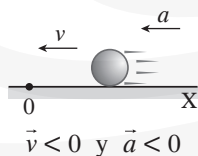
Disminuye la velocidad



Disminuye la velocidad



Aumenta la velocidad



Fórmulas (escalares)

$$1. \quad v_2 = v_1 \pm a\Delta t$$

$$2. \quad v_2^2 = v_1^2 \pm 2ad$$

$$3. \quad d = v_1\Delta t \pm \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

$$4. \quad d = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \Delta t$$

Nota

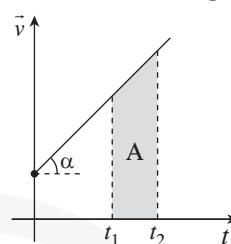
Se emplea el signo

- Más (+) cuando aumenta la velocidad.
- Menos (-) cuando disminuye la velocidad.

El empleo de los signos se hace sin considerar la dirección del movimiento.

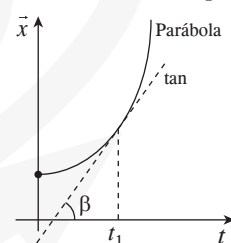
Gráficas

Velocidad vs. Tiempo



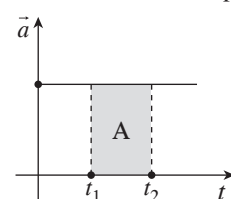
$$\vec{a} = \tan \alpha \quad \text{y} \quad A = \Delta \vec{x}$$

Posición vs. Tiempo



$$\text{Para } t_1 \text{ la } \vec{v}_1 = \tan \beta$$

Aceleración vs. Tiempo



$$A = \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$



Recuerda

Las cantidades cinemáticas posición, desplazamiento o velocidad y aceleración son cantidades vectoriales, por tanto, cuando se les emplee se debe resaltar su magnitud (módulo) y su dirección.



Problemas resueltos

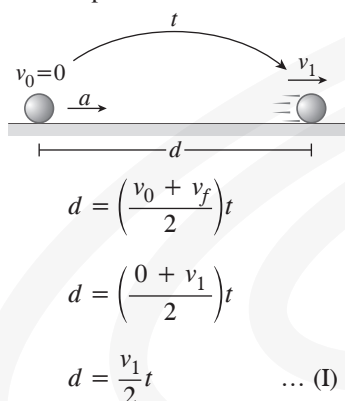
1. Una partícula, partiendo del reposo, se desplaza con movimiento rectilíneo de aceleración constante, terminando su recorrido con rapidez v_1 . Para que la partícula se desplace 3 veces la distancia del recorrido anterior con rapidez constante v_2 , empleando el mismo tiempo, es necesario que la relación $\frac{v_1}{v_2}$ sea (UNI 2014 - I)

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

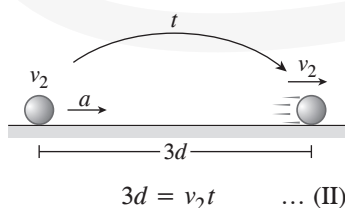
Resolución

Sean las rapidez v_1 y v_2 del primer y segundo caso, respectivamente. Nos piden $\frac{v_1}{v_2}$.

Primer caso: La partícula realiza MRUV.



Segundo caso: La partícula realiza MRU y se desplaza $3d$ en el mismo tiempo t .



Reemplazamos (I) en (II)

$$3 \left(\frac{v_1}{2} t \right) = v_2 t$$

$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$$

Rpta.: $\frac{2}{3}$

2. Los extremos de un tren bala que viaja horizontalmente con aceleración constante, pasan por un mismo punto con velocidades u y v , respectivamente.

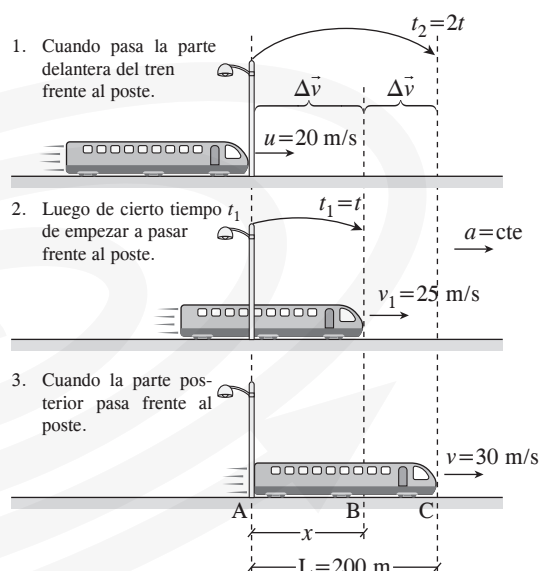
Determine qué parte de la longitud L del tren, en m, pasaría por ese punto en la mitad del tiempo que ha necesitado para pasar el tren entero si $u = 20$ m/s, $v = 30$ m/s y $L = 200$ m. (UNI 2012 - II)

- A) 20 B) 280 C) 90
D) 100 E) 120

Resolución

A partir del enunciado se construye el siguiente gráfico, del cual tomaremos como referencia un poste y los desplazamientos del tren los analizaremos tomando el punto de la parte delantera del tren.

Recuerde que en un MRUV a intervalos de tiempo iguales, las variaciones de velocidad son iguales.



El tren realiza un MRUV, es decir, los cambios de velocidad son proporcionales con el tiempo, por lo que $v_1 = 25$ m/s, además

$$d = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t$$

De A $\rightarrow$ B

$$x = \left(\frac{20 + 25}{2} \right) t \quad \dots (I)$$

De A $\rightarrow$ C

$$L = \left(\frac{20 + 30}{2} \right) (2t) \quad \dots (II)$$

Dividiendo (I) $\div$ (II)

$$\frac{x}{L} = \frac{9}{10(2)}$$

Reemplazando en L

$$x = 90 \text{ m}$$

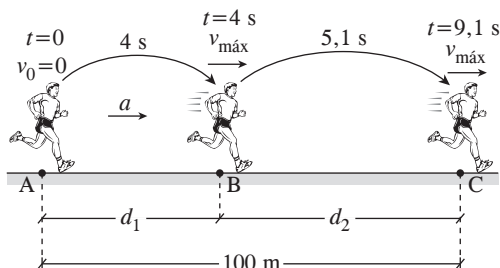
Rpta.: 90 m

3. Un corredor realiza una carrera de 100 m en 9,1 s. Si el corredor parte del reposo llegando a su rapidez máxima en 4 s, manteniendo esta velocidad hasta el final de la carrera, determine su aceleración media, en m/s^2 , en los primeros 4 s. (UNI 2017-II)

- A) 1,42 B) 1,83 C) 2,08
D) 2,17 E) 3,52

Resolución

A partir del enunciado representamos gráficamente el movimiento.



Nos piden la aceleración media en los primeros 4 s, pero como se trata de un MRUV, donde la aceleración es constante, concluimos: $a_{\text{media}} = a = ?$

Del gráfico: $100 = d_1 + d_2 \quad \dots (I)$

Tramo AB: MRUV

$$d_1 = v_0 t_{AB} + \frac{1}{2} a t_{AB}^2 \rightarrow d_1 = a(4)^2$$

$$d_1 = 8a \quad \dots (II)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + a t_{AB} \\ \underline{v_{\text{máx}}} &= a(4) \quad \dots (III) \end{aligned}$$

Tramo BC: MRU

$$d_2 = v_{\text{máx}} t_{BC}$$

De (III): $d_2 = 4a(5,1) \rightarrow d_2 = 20,4a \quad \dots (IV)$

Reemplazamos (IV) y (II) en (I)

$$100 = 8a + 20,4a \rightarrow a = \frac{100}{28,4}$$

$$\therefore a = 3,52 \text{ m/s}^2$$

Rpta.: 3,52 m/s^2

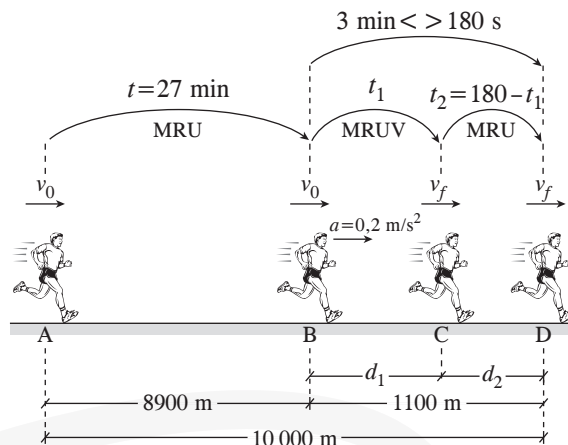
4. Un corredor espera completar la carrera de 10 000 m en 30 min. Después de 27 min, corriendo a velocidad constante, todavía le falta por recorrer 1100 m. Determine, aproximadamente, el tiempo, en s, que debe acelerar a $0,2 \text{ m/s}^2$, a partir de los 27 min con la finalidad de obtener el tiempo deseado. (UNI 2014-II)

- A) 2,8 B) 3,1 C) 4,2
D) 4,8 E) 5,2

Resolución

Se representa gráficamente el enunciado, considerando que en el tramo de BD no necesariamente el corredor va acelerando, es por ello que se considera el tramo BC en el que acelera con MRUV y luego seguiría con MRU, de no ser así, t_1 tendría que resultar 180s.

Se pide el tiempo t_1 en el cual acelera.



En el tramo AB (MRU)

$$d_{AB} = v_0 t$$

$$8900 \text{ m} = v_0 \times (27 \times 60 \text{ s})$$

$$v_0 = 5,49 \text{ m/s}$$

Del gráfico: $d_1 + d_2 = 1100 \text{ m} \quad \dots (I)$

En el tramo BC (MRUV)

$$\rightarrow d_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$d_1 = 5,49 t_1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 t_1^2$$

$$d_1 = 5,49 t_1 + 0,1 t_1^2 \quad \dots (II)$$

$$\rightarrow v_f = v_0 + a t_1$$

$$v_f = 5,49 + 0,2 t_1$$

En el tramo CD (MRU)

$$\rightarrow d_2 = v_f t_2$$

$$d_2 = (5,49 + 0,2 t_1)(180 - t_1)$$

$$d_2 = 988,2 + 30,5 t_1 - 0,2 t_1^2 \quad \dots (III)$$

Reemplazamos (III) y (II) en (I)

$$(5,49 t_1 + 0,2 t_1^2) + (988,2 + 30,5 t_1 - 0,2 t_1^2) = 1100$$

$$0,1 t_1^2 - 36 t_1 + 111,8 = 0$$

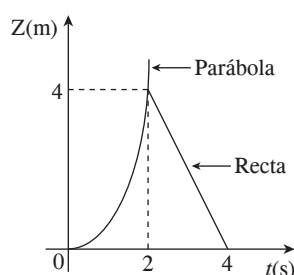
Resolviendo la ecuación, las raíces son

$$t_1 = 3,14 \text{ s y } t_1 = 176,8 \text{ s}$$

Por lo tanto, según las alternativas se está considerando una de las respuestas: $t_1 = 3,1 \text{ s}$.

Rpta.: 3,1 s

5. Observando el siguiente gráfico de movimiento unidimensional de una partícula que parte del reposo, se enuncian las siguientes proposiciones:
(UNI 2015-I)



- I. El módulo de la aceleración del móvil entre $[0; 2]$ segundos es 1 m/s^2 .
 II. La velocidad para $t = 1 \text{ s}$ es $2\hat{k} \text{ m/s}$.
 III. la velocidad para $t = 3 \text{ s}$ es $-0,5\hat{k} \text{ m/s}$.

¿Cuáles son verdaderas?

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) II y III

Resolución

- I. Falsa

En el intervalo de tiempo $t \in [0; 2] \text{ s}$.

Se trata de un MRUV ya que la gráfica posición vs. tiempo es una parábola.

Como el vértice de la parábola está en el instante $t = 0$, la velocidad inicial en $t = 0 \text{ s}$ es $v_0 = 0$.

$$\vec{d} = \vec{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \Delta t^2$$

$$4 - 0 = 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot 2^2$$

$$\rightarrow \vec{a} = 2 \text{ m/s}^2$$

- II. Verdadera

En el intervalo de tiempo $t \in [0; 1] \text{ s}$.

Como el movimiento es la dirección del eje $+Z (+\hat{k})$, la velocidad inicial es nula, entonces se trata de un movimiento acelerado, por lo tanto la velocidad y la aceleración tienen la misma dirección.

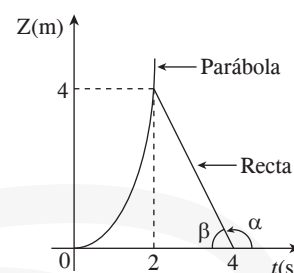
$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{a} \Delta t$$

$$\vec{v}_f = 0 + (2\hat{k})(1)$$

$$\rightarrow \vec{v}_f = +2\hat{k} \text{ m/s}$$

- III. Falsa

En el intervalo de tiempo $t \in [2; 4] \text{ s}$.



Como la gráfica posición vs. tiempo es una recta, se trata de un MRU donde su velocidad es constante.

$$\vec{v} = \tan \alpha \hat{k} = -\tan \beta \hat{k}$$

$$\vec{v} = -\frac{4 \text{ m}}{2 \text{ s}} \hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{v} = -2\hat{k} \text{ m/s}$$

Rpta.: Solo II



Helicopráctica

Nivel I

1. Un cuerpo parte del reposo con aceleración constante de 4 m/s^2 . Determine la diferencia entre las longitudes recorridas en el séptimo y sexto segundo del movimiento.

Resolución

3. Sobre una superficie horizontal fue lanzado un cuerpo con 10 m/s . Sabiendo que se va frenando mientras desliza y en los primeros 5 segundos recorre 25 m, ¿cuánto recorre el cuerpo en el último segundo de su frenado?

Resolución

2. Un coche se mueve con velocidad constante de 72 km/h . De repente, el conductor pisa los frenos y se detiene en 5 s. ¿Qué módulo tendría otra aceleración de frenado para el coche si se quiere que se frene recorriendo la mitad de la longitud del frenado anterior? (Considere MRUV).

Resolución

4. Una partícula se mueve sobre el eje X con aceleración constante y en 2 segundos se desplaza 16 m hacia la derecha. Determine su aceleración sabiendo que al terminar de cubrir el desplazamiento establecido su velocidad es $+6 \text{ m/s}$.

Resolución

Nivel II

5. Un cuerpo parte del reposo con aceleración constante y en los primeros 10 s su velocidad media es de 30 m/s. ¿Qué longitud recorrió en el segundo segundo de su movimiento?

Resolución

7. Un coche se mueve en línea recta con rapidez constante de 6 m/s. Cuando se encuentra a 80 m de otro coche en reposo, este último comienza a moverse, en la misma dirección que el primero, con una aceleración de $0,5 \text{ m/s}^2$. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se dé la menor separación entre los coches?, además, ¿cuál es la mínima separación?

Resolución

6. Un coche se mueve en línea recta hacia un velódromo con rapidez constante de 4 m/s. Cuando está a 64 m del velódromo, de este parten en su encuentro unos ciclistas, cada dos segundos, con aceleración constante de $0,5 \text{ m/s}^2$. Determine a qué distancia del velódromo está el primer ciclista cuando el coche se cruce con el cuarto ciclista.

Resolución

8. Una partícula se mueve sobre el eje X. Para el instante $t_1 = 0 \text{ s}$ pasa por la posición $x = +10 \text{ m}$ con una velocidad de $\vec{v} = -8 \text{ m/s}$ y con una aceleración constante de $\vec{a} = +2 \text{ m/s}^2$. Con esta información, construya las gráficas $\vec{a}$ vs. t , $\vec{v}$ vs. t y $\vec{x}$ vs. t .

Resolución

Nivel III

9. Dos partículas, A y B, se mueven sobre el eje X. Sus ecuaciones de posición son:

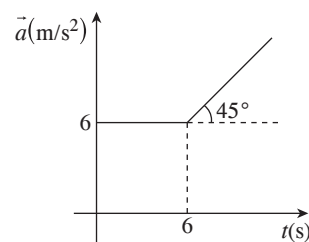
$$\vec{x}_A = (60 - 10t) \text{ m}$$

$$\vec{x}_B = (2t^2 - 20) \text{ m}$$

¿Qué movimiento desarrolla cada partícula?, ¿logran cruzarse? De ser así, ¿en qué lugar lo hacen?

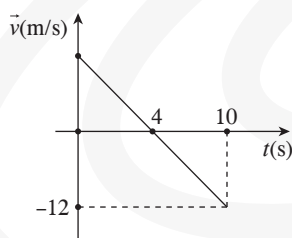
Resolución

11. Una partícula empieza a moverse con una aceleración que depende del tiempo, según la gráfica adjunta. ¿Qué velocidad tiene para el instante $t = 10$ s?



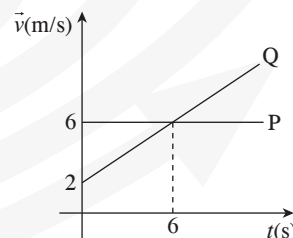
Resolución

10. Una partícula se mueve sobre el eje X. La gráfica de su velocidad versus el tiempo es la que se adjunta. Determine la velocidad de la partícula para $t = 0$ y su aceleración para $t = 4$ s.



Resolución

12. Dos cuerpos, P y Q, se mueven sobre el eje X y en el instante inicial ($t = 0$) Q está 20 metros delante de P. La gráfica velocidad tiempo de dichos cuerpos es



¿Cuál es la mínima separación entre P y Q?

Resolución



Helicotaller

Nivel I

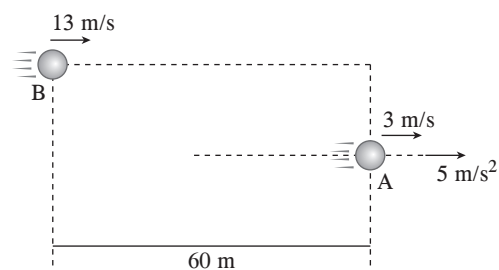
- Un móvil en $t = 0$ s parte del reposo con aceleración constante de 6 m/s^2 . Al cabo de t segundos adquiere una velocidad, la cual mantiene constante durante 5 s y luego frena con una desaceleración de 3 m/s^2 hasta detenerse en $t = 20$ s. Determine, en s, el instante t .

Resolución

- Un móvil inicia su movimiento rectilíneo con una rapidez de 20 m/s y aceleración constante, logrando recorrer 120 m en 5 s , para luego frenar y detenerse en los siguientes 2 s con desaceleración constante. Determine el desplazamiento total, en m, que el móvil experimenta.

Resolución

- Conforme al gráfico, los móviles se mueven en vías paralelas muy próximas. Determine la mínima distancia entre dichos móviles. (Considere que A realiza MRUV y B, MRU).



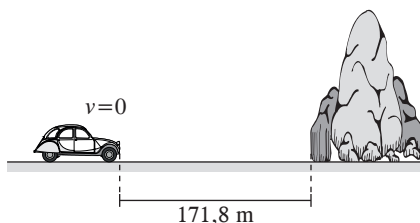
Resolución

Nivel II

- Un auto que realiza MRUV, emplea 1 s en recorrer 18 m y en los siguientes 2 s recorre también 18 m . Determine su recorrido en el último segundo de su movimiento.

Resolución

5. En el instante que el taxista inicia su movimiento con aceleración constante, toca su bocina, de modo que escucha el eco al cabo de 1 s. Determine el recorrido del taxi 1 s después de escuchar el eco. ($v_{\text{sonido}} = 340 \text{ m/s}$)



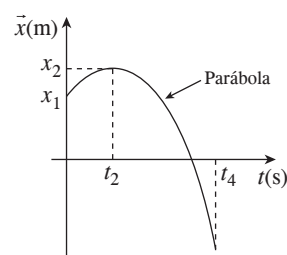
Resolución

6. Una partícula se mueve a lo largo del eje X y su posición varía con el tiempo de acuerdo a la ecuación $x = 5 + 5t + t^2$ (t en s y x en m). Determine el módulo de la velocidad media, en m/s, entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 6 \text{ s}$ de su trayectoria.

Resolución

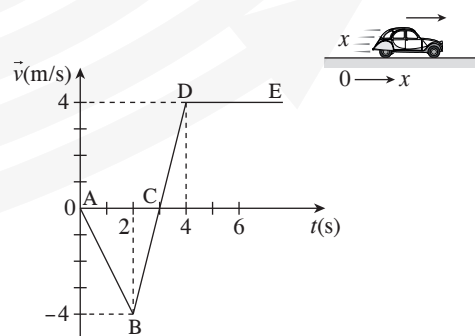
Nivel III

7. En la gráfica se muestra la posición en función del tiempo de una partícula. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
- En el instante t_3 , la velocidad de la partícula es cero. ()
 - Entre los instantes t_3 y t_4 , la rapidez aumenta. ()
 - La aceleración es constante. ()



Resolución

8. De la gráfica, v vs. t mostrada, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



- La velocidad en los tramos AB, BD y DE son $-4\hat{i}$, $+4\hat{i}$ y 0, respectivamente. ()
- En el punto B, el móvil invierte el sentido de su velocidad. ()
- El desplazamiento entre los puntos A y D es $8\hat{i} \text{ m}$. ()

Resolución



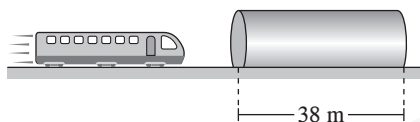
Test 1

Nivel I

1. Un supertrén de 250 m de longitud se está moviendo en línea recta a razón de 83 km/h. Se aplican los frenos en una intersección y t segundos después el último vagón pasa la intersección con una rapidez de 17 km/h. Determine el tiempo t suponiendo una desaceleración constante.

A) 13 B) 15 C) 18
D) 29 E) 31

2. El tren ingresa al túnel con 5 m/s y sale con 15 m/s. Considerando que desarrolla un MRUV y el tren es de 12 m de largo, determine el módulo de su aceleración.



A) 3 m/s^2 B) 2 m/s^2 C) 4 m/s^2
D) 1 m/s^2 E) 5 m/s^2

Nivel II

3. Un auto inicia su movimiento con aceleración constante de $0,8 \text{ m/s}^2$. Luego de cierto tiempo, empieza a realizar un MRU y, finalmente, desacelera con $0,8 \text{ m/s}^2$ hasta que se detiene. ¿Cuánto recorre con MRU si ha recorrido en total 120 m y estuvo en movimiento durante 25 s?

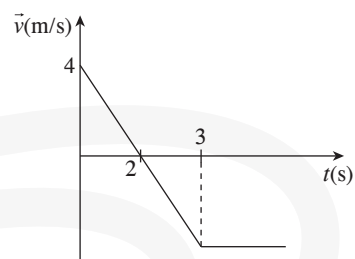
A) 20 m B) 40 m C) 50 m
D) 25 m E) 60 m

4. Un móvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea con una aceleración constante de magnitud 2 m/s^2 y 5 s después de haber pasado por un punto A de su trayectoria tiene una rapidez de 72 km/h. Determine cuál era su rapidez 9 m antes de llegar al punto A.

A) 10 m/s B) 8 m/s C) 20 m/s
D) 4 m/s E) 15 m/s

Nivel III

5. En la gráfica mostrada se pide que calcule la distancia recorrida por el móvil entre los instantes $t = 1 \text{ s}$ y $t = 6 \text{ s}$.



A) 12 m B) 1 m C) 6 m
D) 8 m E) 10 m



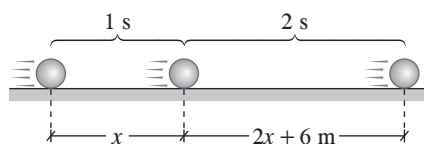
Test 2

Nivel I

1. Un móvil parte del reposo con aceleración constante, recorriendo 18 m en los 3 primeros segundos. Determine la distancia, en m, que recorrerá en los 7 s siguientes.

A) 18 B) 32 C) 64
D) 96 E) 182

2. Se muestran dos tramos consecutivos para un móvil que desarrolla un MRUV. Determine su recorrido luego de 4 s de iniciado su movimiento. (x se expresa en metros).



A) 16 m B) 20 m C) 24 m
D) 32 m E) 48 m

Nivel II

3. En el instante mostrado, el auto B inicia su movimiento con una aceleración constante de módulo 2 m/s^2 . Si el auto A experimenta un MRU con una rapidez de 10 m/s , escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.



- Si $d = 25 \text{ m}$, el auto A alcanza a las justas al auto B. ()
➤ Si $d = 35 \text{ m}$, la distancia mínima entre los autos es 10 m . ()
➤ Si $d = 10 \text{ m}$, los autos se cruzan dos veces. ()

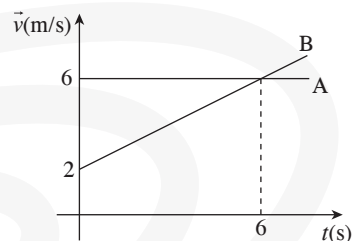
A) FFF B) VFV C) VFF
D) VVF E) VVV

4. La ecuación de la posición de una partícula está representada por $x(t) = 16 - 4t^2$, en donde x se mide en metros y t en segundos. Determine la rapidez de la partícula, en m/s, cuando se encuentra en el origen de coordenadas.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

Nivel III

5. Las velocidades de dos móviles varían con el tiempo, tal como se indica en las gráficas mostradas. Si en $t = 0$ el móvil A se encuentra 20 m detrás de B, determine la distancia mínima que tendrán los móviles.



A) 2 m B) 4 m C) 6 m
D) 10 m E) 32 m



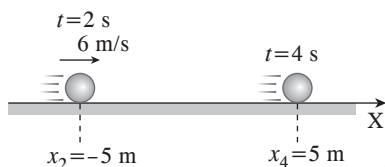
Helicodesafío

1. Una partícula en movimiento rectilíneo con aceleración constante tiene las siguientes posiciones en los instantes indicados: $x_1 = -20$ m, $x_3 = -18$ m y $x_8 = 57$ m. Determine la magnitud de la velocidad, en m/s, en $t = 2$ s.

A) 0 B) 1 C) 5
D) 11 E) 14

2. En la figura se muestra una partícula en MRUV en dos instantes distintos.

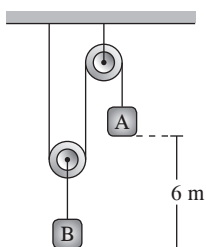
Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.



- En el instante $t = 3$ s, la partícula está reduciendo su rapidez. ()
- La aceleración media entre $t = 2$ s y $t = 3$ s es igual a la correspondiente al intervalo entre $t = 3$ s y $t = 4$ s. ()
- La partícula pasa por el origen de coordenadas en el instante $t = 3$ s. ()

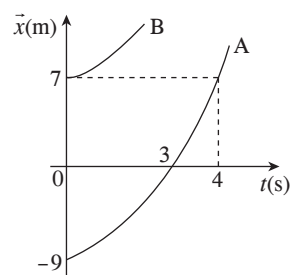
A) VVV B) VVF C) FVF
D) VFF E) FFV

3. Determine el módulo de la aceleración del bloque A si los bloques se cruzan luego de 1 s a partir de la posición mostrada en que son soltados. (Considere que los bloques desarrollan MRUV).



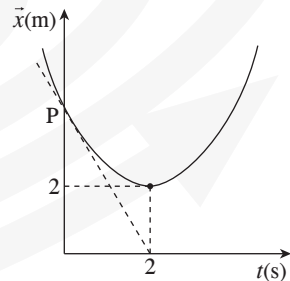
A) 4 m/s^2 B) 8 m/s^2 C) 6 m/s^2
D) 2 m/s^2 E) 12 m/s^2

4. Dos móviles, A y B, se mueven con MRUV, siendo sus gráficas $\vec{x}$ vs. t las mostradas en la figura. Si se sabe que el móvil parte con velocidad inicial $3\hat{i} \text{ m/s}$ y tiene una aceleración $3\hat{i} \text{ m/s}^2$, determine la distancia de separación, en m, entre A y B en el instante $t = 1$ s.



A) 11,5 B) 15,5 C) 17,5
D) 21,5 E) 19,5

5. La gráfica posición versus tiempo que se muestra corresponde a un MRUV. Determine la posición del móvil en el instante $t = 6$ s si P es un punto de tangencia.



A) 7 m B) 8 m C) 9 m
D) 10 m E) 12 m

CAÍDA LIBRE



Objetivos

- Conoce las condiciones del movimiento de caída libre.
- Deduce el tipo de trayectoria que describirá conociendo su velocidad inicial.
- Describe y analiza el movimiento vertical y parabólico de caída libre.



Sabías que...

Un astronauta dejó caer en la Luna una pluma y un martillo en homenaje a Galileo

Hay anécdotas de las misiones espaciales que quedan en cierto segundo plano y que vale la pena recordar, como aquella de la foto que el astronauta Charlie Duke dejó en la Luna. Pero lo que hizo el comandante David Scott en la misión Apolo 15 no fue dejar un recuerdo allí, sino hacer un homenaje a Galileo en la superficie lunar.

Galileo Galilei fue un importante científico a finales del siglo XVI y principios del XVII, sobre todo en los campos de la física y la astronomía.

En la Luna hay una gravedad más débil (un sexto de la aceleración de la de la Tierra), pero lo que no hay es atmósfera, y por tanto no hay resistencia del aire. Por tanto se cumplen las condiciones para que ante una caída no haya una fuerza de resistencia por parte del aire, y por tanto dos objetos soltados desde la misma altura deberían tocar el suelo a la vez.

Para demostrarlo, Scott tomó un martillo de geólogo de 1,32 kilogramos y una pluma de halcón de unos 30 gramos. Sostuvo ambos a la misma altura (unos 1,6 metros) y los dejó caer, cumpliéndose lo que según la física debería pasar (y mostrándolo en directo por televisión).

“En mi mano izquierda tengo una pluma, en mi mano derecha tengo un martillo. Supongo que una de las razones por las que hemos podido llegar aquí es gracias a que un caballero llamado Galileo hizo un descubrimiento muy significativo sobre la caída de objetos en campos gravitatorios, y qué mejor lugar para confirmar sus hallazgos que en la Luna.

Así que pensamos en demostrarlo aquí para vosotros [el público] (y la pluma tenía que ser de halcón, por nuestro Falcón [uno de los módulos de la misión]). Los voy a soltar desde aquí arriba y, con suerte, caerán al suelo al mismo tiempo [los deja caer]. ¿Qué os parece? Galileo tenía razón.

<https://www.xataka.com/espacio/la-historia-de-la-pluma-y-el-martillo-que-un-astronauta-dejo-caer-en-la-luna-en-homenaje-a-galileo>



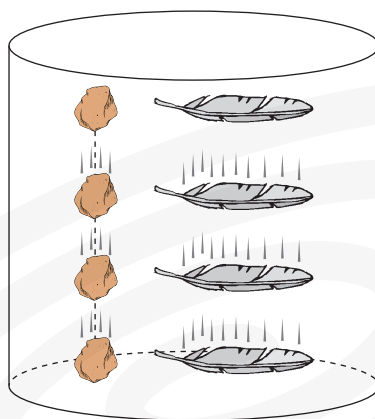


GALILEO VS. ARISTÓTELES

El filósofo y naturalista griego Aristóteles (384-322 a. C.) ejerció durante mucho tiempo una gran influencia en la ciencia debido, entre otras cosas, a sus ideas acerca del movimiento de caída de los cuerpos. En su tratado *Sobre el cielo* desarrolló dos ideas principales: los objetos caen al suelo porque van hacia su estado natural y los objetos pesados caen antes que los ligeros.

Galileo se opuso a las ideas del pensamiento aristotélico sobre la caída de los cuerpos, que eran apoyadas por la mayoría de sus contemporáneos. Para dar a conocer sus investigaciones acerca del movimiento, Galileo escribió un libro en forma de diálogo llamado *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*. En este libro aparecen tres personajes: Salviati, que representa a Galileo; Sagredo, un personaje bien informado sobre la ciencia de su tiempo, y Simplicio, un hombre que expresa el pensamiento de la mayoría de las personas y las ideas de Aristóteles.

Galileo infirió que incluso una piedra y una pluma de ave caerían al mismo tiempo si se dejaban caer desde la misma altura sin estar en presencia del aire, es decir, si estuvieran en el vacío, donde no hay resistencia del aire a la caída de los objetos.



Sin embargo se generaron controversias con respecto a la rapidez con la que llegaban los cuerpos a la superficie.

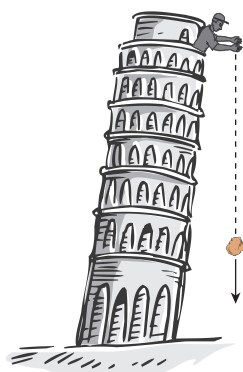
Galileo logró resolver las controversias con respecto a la caída libre haciendo rodar esferas de bronce pulido sobre un canal de madera logrando de esta forma que la caída de los cuerpos sea más lenta con lo cual logro relacionar con sus desplazamientos y así obtener sus rapidezces en cualquier instante.

CAÍDA LIBRE

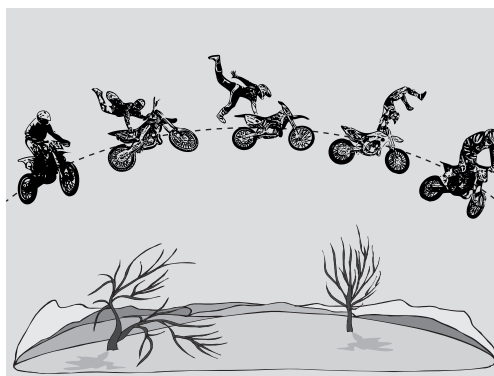
Se denomina un movimiento de caída libre cuando un cuerpo experimenta movimiento a causa de la acción de la gravedad sin resistencia alguna.

Un cuerpo en caída libre puede experimentar diferentes trayectorias. *Ejemplo*

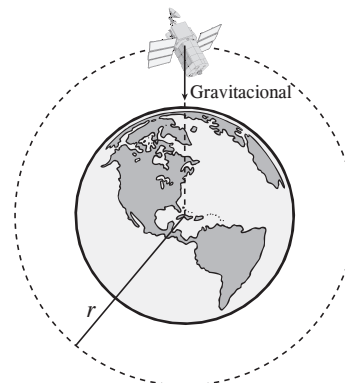
Trayectoria vertical



Trayectoria parabólica

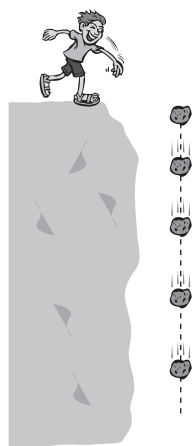


Trayectoria circular



Así también podría ser con trayectoria elíptica, helicoidal entre otros.

MOVIMIENTO VERTICAL DE CAÍDA LIBRE (MVCL)



Se denomina movimiento de caída libre al movimiento que describen los cuerpos al moverse solo bajo la influencia de la gravedad. Se denomina movimiento vertical de caída libre (MVCL) al movimiento vertical que describen los cuerpos al ser dejados caer o ser lanzados verticalmente cerca de la superficie terrestre o, en general, cerca de cualquier cuerpo celeste, despreciando la resistencia del aire.

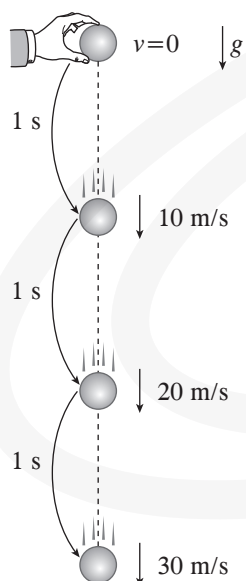
Se comprueba experimentalmente que este es un movimiento uniformemente acelerado y esta aceleración constante se denomina aceleración de la gravedad y se denota con letra g . El valor de g para zonas no muy alejadas de la superficie terrestre es de aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$, aunque hay ligeras variaciones que dependen principalmente de la altitud. El valor de g en la superficie de la Tierra comúnmente se aproxima a los 10 m/s^2 .

$$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$$

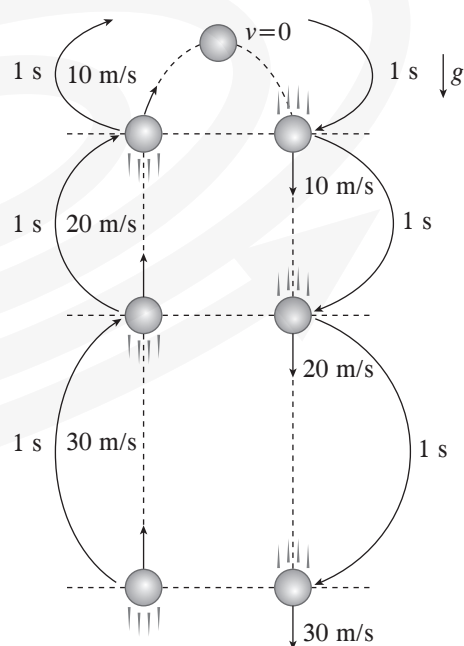
Analicemos el caso de que un cuerpo es dejado caer considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Cuando un cuerpo cae describiendo un MVCL en cada segundo la velocidad aumenta en 10 m/s (o $9,8 \text{ m/s}$). Según esto:

➤ Cuando soltamos un cuerpo



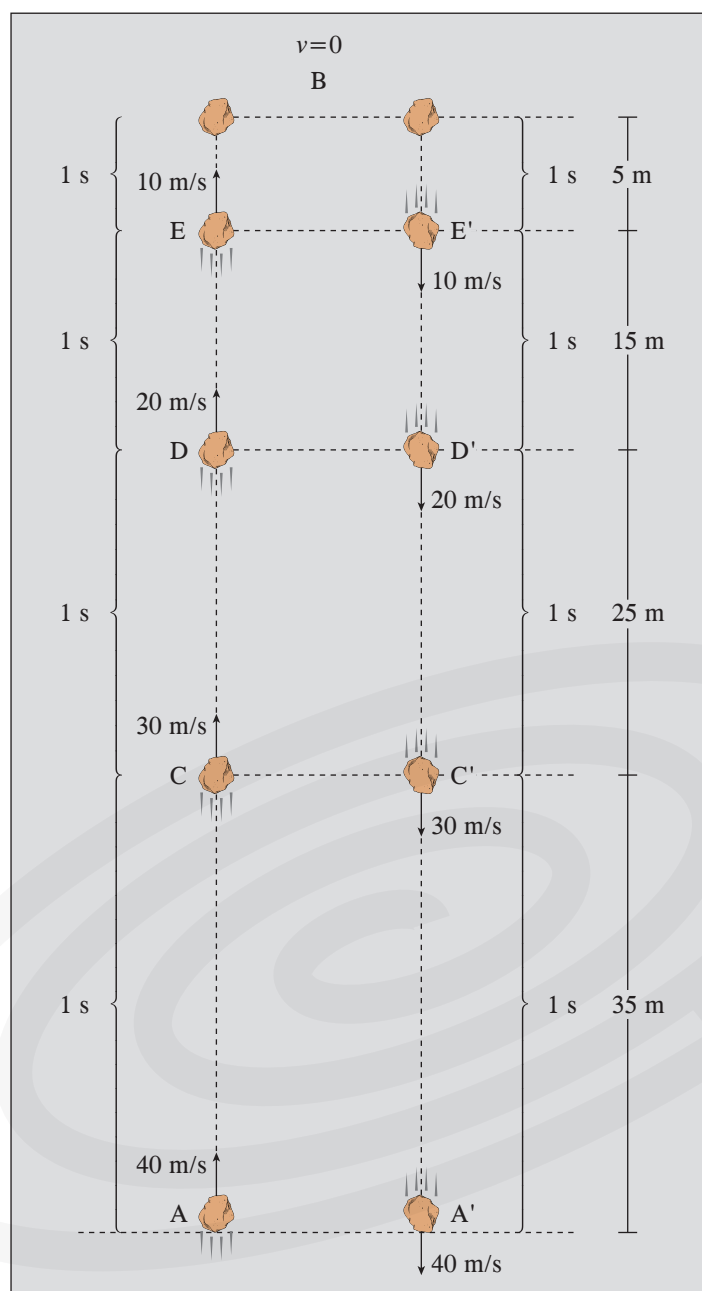
➤ Cuando lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba



De lo cual deducimos que para un mismo nivel

- $t_{\text{subida}} = t_{\text{bajada}}$
- $v_{\text{subida}} = v_{\text{bajada}}$ (rapidez)
- $\vec{v}_{\text{subida}} = -\vec{v}_{\text{bajada}}$ (velocidad)
- $t_{\text{subida}} = \frac{v_{\text{subida}}}{g}$

Galileo, con sus aproximaciones, realizó el cálculo de las alturas para cada segundo mientras asciende o desciende.



Observación

Como un movimiento vertical de caída libre tiene una trayectoria rectilínea y se considera una aceleración constante entonces se trata de un caso particular de MRUV, por lo tanto se usarán las mismas ecuaciones.

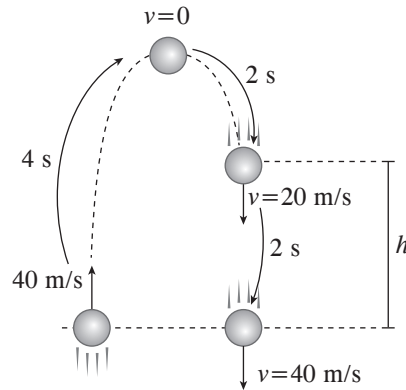
Ecuaciones escalares:

N.º	Fórmula
1.º	$h = v_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2$
2.º	$v_f = v_0 \pm g t$
3.º	$v_f^2 = v_0^2 \pm 2 g h$
4.º	$h = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t$

Se usa el signo
(+) en el descenso
(-) en el ascenso

Ejemplo

Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 40 m/s. Determine la altura a la que se encuentra luego de 6 s. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

$$h = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t$$

$$h = \left(\frac{20 \text{ m/s} + 40 \text{ m/s}}{2} \right) \cdot 2 \text{ s}$$

$$h = 60 \text{ m}$$

Para estos casos, donde la partícula asciende y desciende podemos realizar el cálculo de las cantidades cinemáticas con las ecuaciones vectoriales.

No obstante hay algunas diferencias fundamentales respecto a las ecuaciones escalares.

- Se considera velocidad positiva (+) si su dirección es vertical hacia arriba.
- Se considera velocidad negativa (-) si su dirección es vertical hacia abajo.
- La aceleración de la gravedad es negativa (ya que siempre es vertical hacia abajo).
- El desplazamiento vertical es positivo (+) si termina por encima del nivel del lanzamiento.
- El desplazamiento vertical es negativo (-) si termina por debajo del nivel del lanzamiento.

1. $\vec{h} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2$
2. $\vec{v}_f = v_0 + \vec{g} \cdot t$
3. $\vec{h} = \left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_f}{2} \right) t$

En el ejemplo anterior apliquemos una solución mediante las ecuaciones vectoriales.

$$\vec{h} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2$$

$$\vec{h} = (+40 \text{ m/s})(6 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2)(6 \text{ s})^2$$

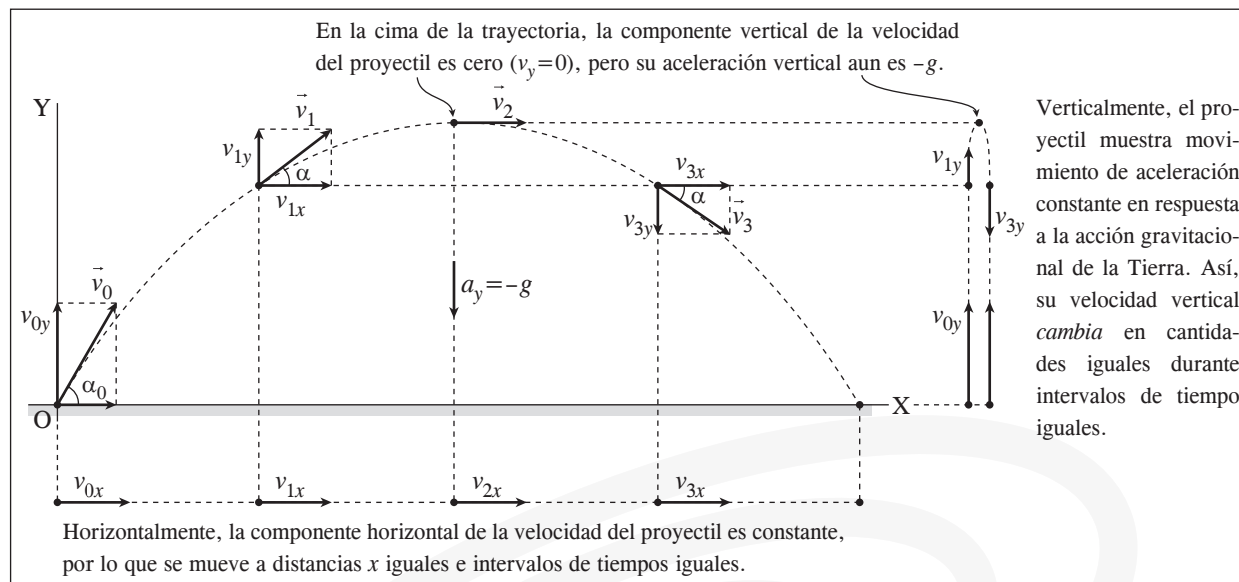
$$\vec{h} = 240 \text{ m} - 180 \text{ m}$$

$$\vec{h} = 60 \text{ m}$$

MOVIMIENTO PARABÓLICO DE CAÍDA LIBRE

Un *proyectil* es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles.

Si en este tipo de movimientos la resistencia del aire es despreciable, la trayectoria es una parábola con eje de simetría paralela a la aceleración de la gravedad.



A partir del grafico determinemos las componentes rectangulares de la velocidad inicial:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$$

PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS

Fue anunciado por Galileo Galilei, y establece que “los movimientos componentes en un movimiento compuesto se desarrollan independientemente uno de otro, es decir, el desarrollo de un movimiento no se ve alterado por la aparición de otro en forma simultánea”.

El MPCL lo analizaremos como si fuera la composición de dos movimientos, un MRU (en la horizontal) y un MVCL.

$\text{MPCL} = \underbrace{\text{MRU}}_{\text{Horizontal}} + \underbrace{\text{MVCL}}_{\text{Vertical}}$
--

➤ En la horizontal: $x = (v_0 \cos \alpha_0)t \quad \dots (1)$

➤ En la vertical: $y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots (2)$

➤ Despejamos el tiempo a partir de (1)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}$$

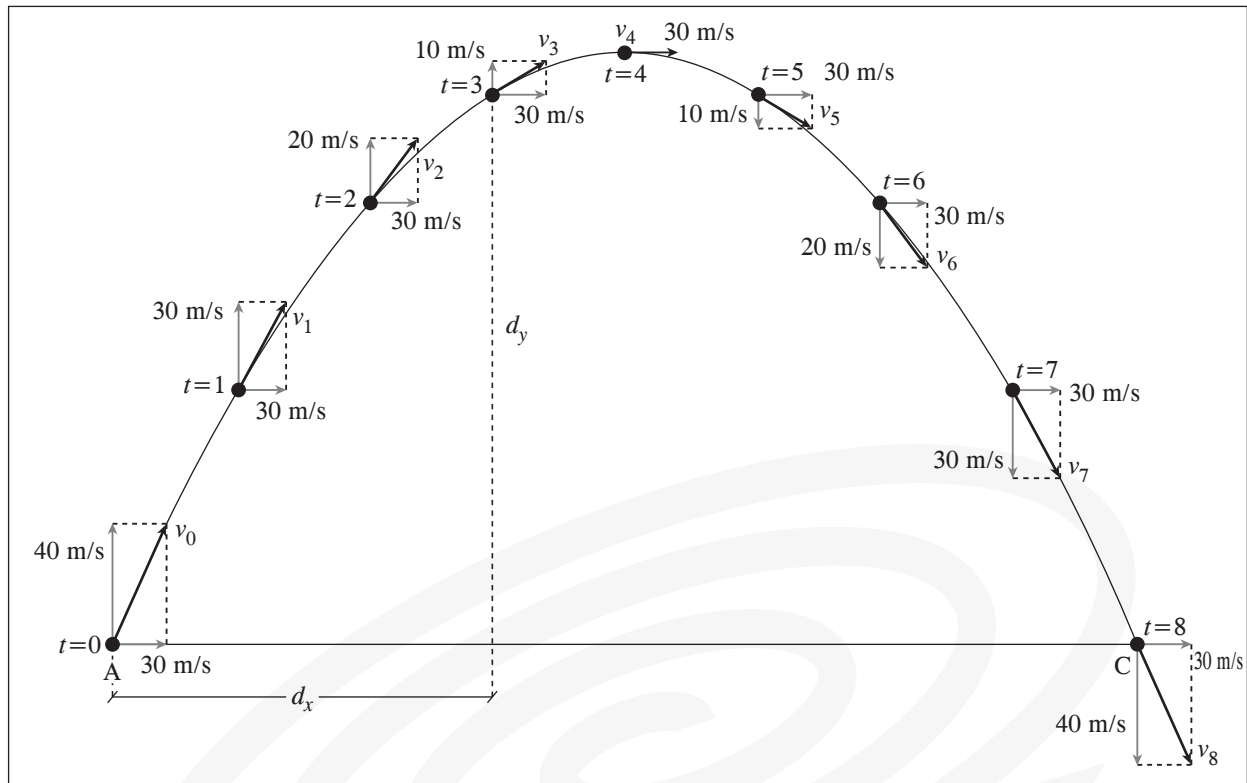
➤ Reemplazamos en (2)

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}x^2$$

$y = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}x^2$	(se denomina ecuación de la trayectoria)
--	--

No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Las cantidades son constantes, así que la ecuación tiene la forma $y = bx - cx^2$, donde b y c son constantes. Esta es la ecuación de una parábola. En el movimiento de proyectiles, con nuestro modelo simplificado, la *trayectoria siempre es una parábola con eje de simetría paralela a la aceleración*.

Ejemplo: Analicemos segundo a segundo el proyectil lanzado.



De $t = 0$ a $t = 3$ s

i) Eje X (MRU)

$$d_x = v_x \cdot t \rightarrow d_x = 30 \text{ m/s} \cdot 3 \text{ s} = 90 \text{ m}$$

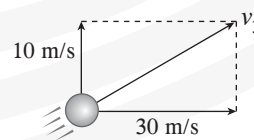
ii) Eje Y (MVCL)

$$d_y = \left(\frac{v_{0y} + v_{fy}}{2} \right) \cdot t \rightarrow d_y = \left(\frac{40 \text{ m/s} + 10 \text{ m/s}}{2} \right) \cdot 3 \text{ s}$$

$$d_y = (25 \text{ m/s})(3 \text{ s})$$

$$d_y = 75 \text{ m}$$

En $t = 3$ s



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

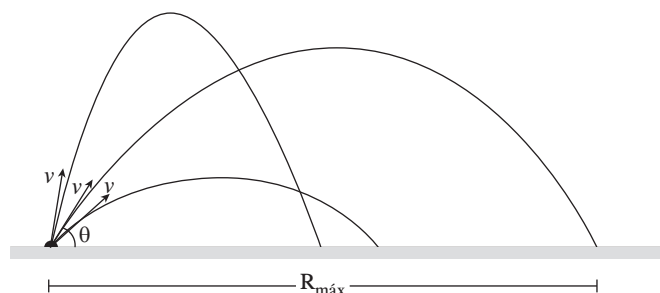
$$v_3 = \sqrt{(30 \text{ m/s})^2 + (10 \text{ m/s})^2}$$

$$v_3 = \sqrt{900 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 100 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$v_3 = \sqrt{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

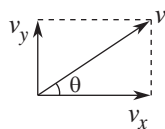
$$\therefore v_3 = 10\sqrt{10} \text{ m/s}$$

Ejemplo: Determine el alcance horizontal que logra un proyectil al ser lanzado tal como se muestra como también el alcance horizontal máximo.



Resolución

Determinemos las componentes rectangulares de la velocidad



$$\triangleright v_x = v \cdot \cos \theta \quad \triangleright v_y = v \cdot \sin \theta$$

Determinemos el tiempo de vuelo

$$t_{\text{sub}} = \frac{v_{\text{subida}}}{g} \rightarrow t_{\text{vuelo}} = 2 \frac{v_{\text{subida}}}{g} \rightarrow t_{\text{vuelo}} = 2 \frac{v \sin \theta}{g}$$

Determinemos el alcance horizontal

$$D_x = v_x \cdot t_{\text{vuelo}} \rightarrow D_x = (v \cdot \cos \theta) \left(2 \frac{v \sin \theta}{g} \right)$$

$$D_x = v \cdot \cos \theta \cdot \frac{2v \sin \theta}{g} \rightarrow D_x = \frac{v^2}{g} 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

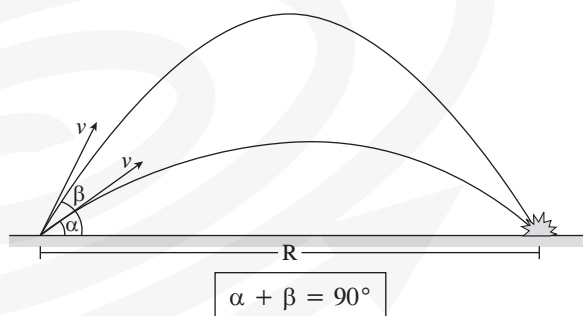
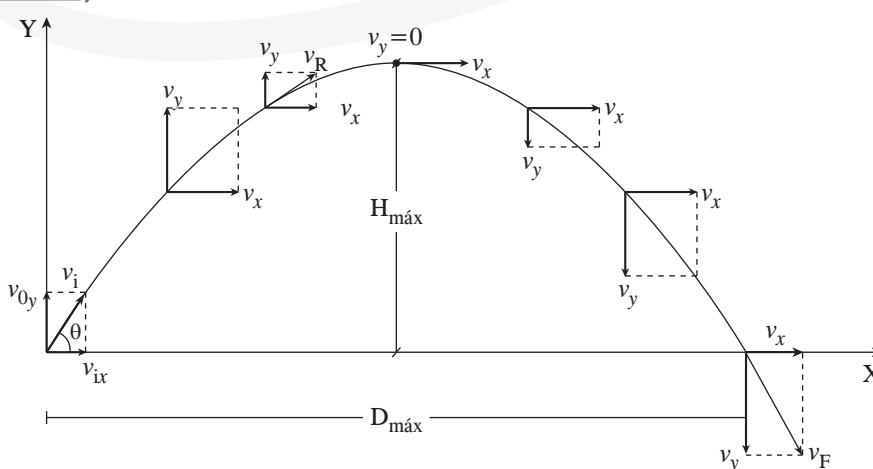
$$\therefore D_x = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta \quad \dots (1)$$

A partir de la ecuación (1) se deduce que el alcance horizontal será máximo cuando $\sin 2\theta$ sea máximo cuando sea 1.

CUIDADO: $\sin 2\theta = 1$, entonces $2\theta = 90^\circ$.

Se deduce que el ángulo para un alcance horizontal es máximo cuando $\theta = 45^\circ$.

De la ecuación (1) se deduce que 2θ puede ser agudo o puede ser obtuso, lo cual significa que para un lanzamiento de un proyectil hay dos ángulos que logran un mismo alcance horizontal al ser lanzados con la misma rapidez en ambos casos.

**Observación**

Si determinamos la altura máxima, $H_{\text{máx}}$, y el alcance horizontal D_x en términos de v y θ , y dividimos ambas expresiones obtenemos la siguiente relación:

$$\tan \theta = \frac{4H_{\text{máx}}}{D_{\text{máx}}}$$

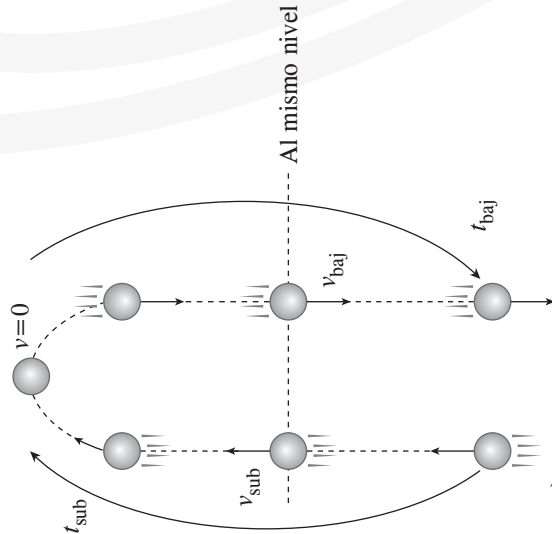


CAÍDA LIBRE

Movimiento por el cual los cuerpos solo son afectados por la acción de la gravedad.

Movimiento vertical de caída libre (MVCL)

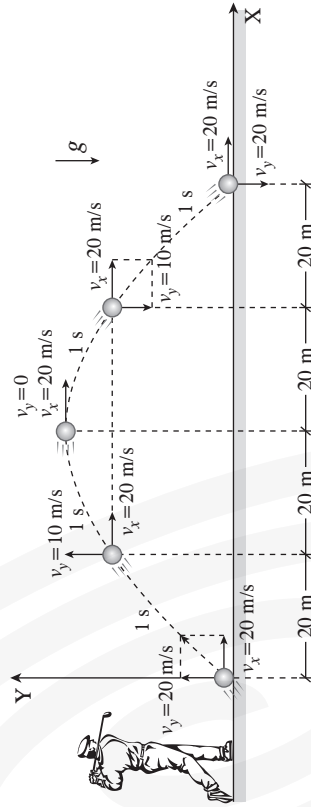
Es el movimiento mecánico de trayectoria vertical



- $v_{\text{sub}} = v_{\text{baj}}$
- $\vec{v}_{\text{sub}} = -\vec{v}_{\text{baj}}$
- $t_{\text{sub}} = t_{\text{baj}}$
- $t_{\text{sub}} = \frac{v_{\text{sub}}}{g}$
- $\underbrace{\text{MRUV}}_{\text{Ecuaciones}} = \underbrace{\text{MVCL}}_{\text{Ecuaciones}}$

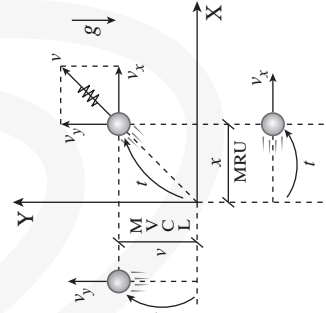
Movimiento parabólico de caída libre (MPCL)

Es aquel movimiento mecánico en el cual la trayectoria es una parábola



El estudio de este movimiento generalmente se desarrolla descomponiendo el movimiento (velocidad) en la horizontal (X) y vertical (Y).

- En la horizontal (X): MRU
 $x = v_x \cdot t$
- En la vertical (Y): MVCL
 $y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$
- Módulo de la velocidad (v):
 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$





Problemas resueltos

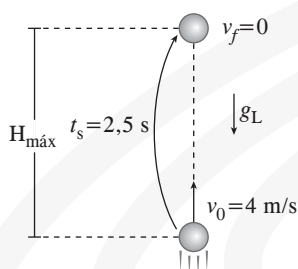
1. Un astronauta, en la Luna, arrojó un objeto verticalmente hacia arriba, con una rapidez inicial de 4 m/s. El objeto tardó 2,5 s para alcanzar el punto más alto de su trayectoria. Con respecto a este evento, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta. (UNI 2013-II)

- La magnitud de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es 1,6 m/s². ()
- La altura que alcanzó el objeto fue de 5 m. ()
- La rapidez del objeto después de 2 s de su lanzamiento fue de 0,4 m/s. ()

- A) FVF B) VVF C) VFV
D) FFV E) VVV

Resolución

Se trata de un movimiento vertical de caída libre con aceleración constante en la Luna.



g_L : aceleración de la gravedad en la Luna

- Verdadera

$$t_s = \frac{v_0}{g_L}$$

$$\rightarrow g_L = \frac{v_0}{t_s} = \frac{4 \text{ m/s}}{2,5 \text{ s}}$$

$$g_L = 1,6 \text{ m/s}^2$$

- Verdadera

Sabemos en caída libre

$$h = \left(\frac{v_0 + v_f}{2} \right) t$$

$$H_{\text{máx}} = \left(\frac{4 \text{ m/s} + 0}{2} \right) \cdot 2,5 \text{ s} = 5 \text{ m}$$

- Falsa

$$v_f = v_0 - g_L t$$

$$v_f = 4 \text{ m/s} - (1,6 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})$$

$$v_f = 0,8 \text{ m/s}$$

Rpta.: VVF

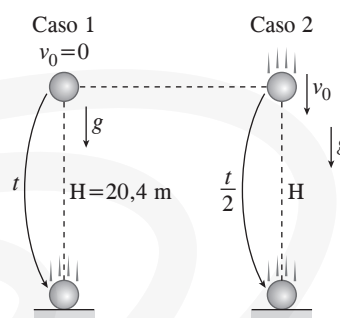
2. Se suelta una piedra desde una altura $h = 20,4 \text{ m}$, llegando al suelo en un tiempo t . Determine, aproximadamente, con qué rapidez, en m/s, hacia abajo, debe lanzarse la misma piedra para que llegue al suelo desde la misma altura en un tiempo $\frac{t}{2}$.

$$(g = 9,81 \text{ m/s}^2) \text{ (UNI 2016-II)}$$

- A) 10 B) 12 C) 14
D) 15 E) 19

Resolución

Se trata de un MVCL donde la aceleración de la gravedad se considera constante. Nos piden v_0 en el segundo gráfico que representa el enunciado.



- Para el caso 1

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$H = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$20,4 \text{ m} = \frac{1}{2} (9,81 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$\rightarrow t = 2,04 \text{ s}$$

- Para el caso 2

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$H = v_0 \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{t}{2} \right)^2$$

$$20,4 \text{ m} = v_0 \left(\frac{2,04 \text{ s}}{2} \right) + \frac{1}{2} (9,81 \text{ m/s}^2) \left(\frac{2,04 \text{ s}}{2} \right)^2$$

$$\therefore v_0 = 15 \text{ m/s}$$

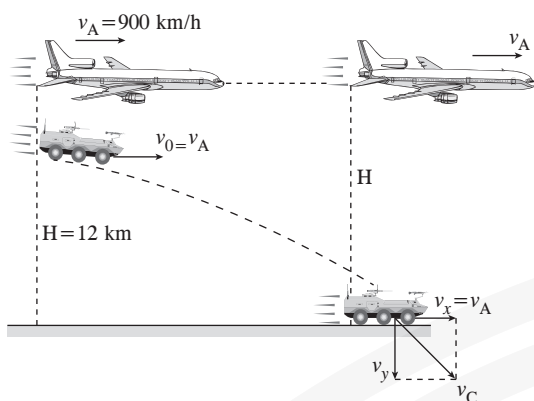
Rpta.: 15 m/s

3. Un avión de transporte vuela horizontalmente a una altura de 12 km, con una velocidad de 900 km/h. De la rampa trasera de carga se deja caer un carro de combate. Calcule la distancia, en km, que separa al carro de combate del avión cuando este choca contra el suelo. Suponga que el avión sigue volando con velocidad constante. (UNI 2016-I)

A) 10 B) 12 C) 14
D) 15 E) 19

Resolución

A partir del enunciado representamos gráficamente el problema.



Al soltar el carro de combate, por inercia, mantiene su velocidad inicial que es igual a la velocidad horizontal del avión. Luego empieza un MPCL. Por el principio de independencia de los movimientos de Galileo: la componente horizontal v_x de la velocidad del carro de combate es igual a la velocidad del avión por lo que siempre se mantendrá en la misma línea vertical hasta antes de impactar en el suelo. Por lo tanto, en el instante del impacto del carro de combate con el suelo la distancia de separación d es $d = H = 12$ km.

Rpta.: 12 km

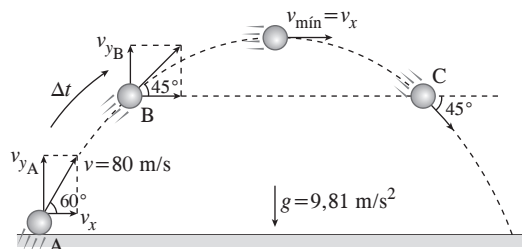
4. Un proyectil se dispara desde el suelo con una rapidez de 80 m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal. Determine, aproximadamente, después de qué tiempo, en s, por primera vez la velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal. ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

A) 0,98 B) 3,20 C) 1,98
D) 3,98 E) 2,98

Resolución

Al considerar la aceleración de la gravedad una cantidad constante, la trayectoria que describe es una parábola cuyo eje de simetría es paralelo a la aceleración de la gravedad (vertical).

Según el enunciado describimos gráficamente el movimiento del proyectil.

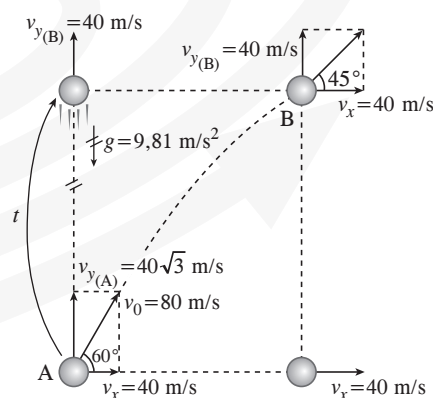
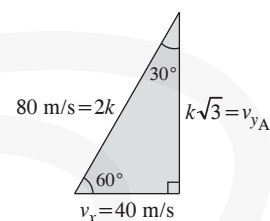


Mientras el proyectil está subiendo en la posición B será la primera vez que la velocidad formará 45° con la horizontal, la segunda vez será cuando el proyectil está bajando por la posición C que está al mismo nivel que B.

Nos piden el intervalo de tiempo de A hacia B:

$$t_{AB} = t \quad \dots (1)$$

➤ En la posición A.



Considerando el principio de independencia de movimientos:

- En la horizontal: Como si se tratará de un MRU, v_x es constante, entonces
➤ En la posición B: $v_x = v_{yB} = 40 \text{ m/s}$
- En la vertical: Como si se tratará de un MVCL, v_x es constante, entonces
➤ En la subida de A hacia B
$$v_f = v_0 - gt$$
$$v_{yB} = v_{yA} - gt$$
$$40 \text{ m/s} = 40\sqrt{3} \text{ m/s} - (9,81 \text{ m/s}^2)t$$
$$\therefore t = 2,98 \text{ s}$$

Rpta.: 2,98 s

5. Un avión que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = (80\hat{i} + 50\hat{j})$, suelta un paquete cuando se encuentra a una altura $y = 2000$ m. Determine, aproximadamente, la distancia entre el avión y el paquete 8 s después de haberse soltado, en metros.

($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) (UNI 2015-II)

- A) 230 B) 280 C) 300
D) 314 E) 399

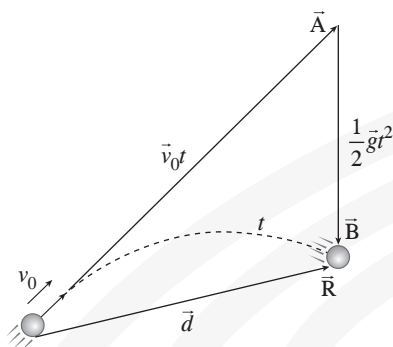
Resolución

Recordemos la adición de vectores $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.

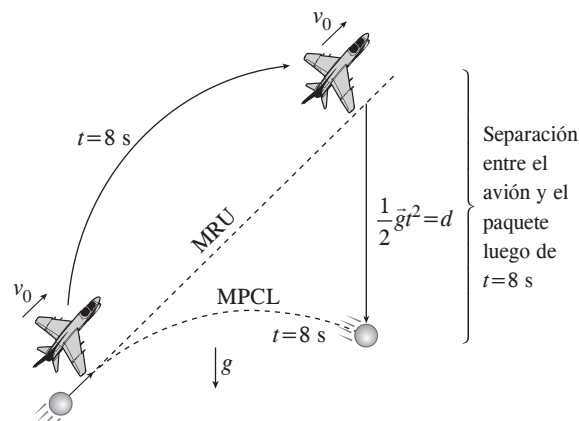
En la ecuación del desplazamiento

$$\underbrace{\vec{d}}_{\vec{R}} = \underbrace{\vec{v}_0 t}_{\vec{A}} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2}_{\vec{B}}$$

Representamos gráficamente



Representamos gráficamente el fenómeno a partir del enunciado.



En el instante que se suelta el paquete desde el avión, ambos presentan igual velocidad, por lo tanto al realizar la descomposición rectangular de ambas velocidades sus componentes horizontales son iguales, luego

- el avión sigue un MRU, entonces su componente horizontal es constante.
- el paquete realiza un MPCL, por el principio de independencia de los movimientos la componente horizontal es constante.

El avión y el paquete se mantienen sobre la misma vertical mientras se mantengan en vuelo.

Entonces, la distancia de separación d

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

$$d = \frac{1}{2} (9,81 \text{ m/s}^2) (8 \text{ s})$$

$$d \approx 314 \text{ m}$$



Helicopráctica

Nivel I

1. Una partícula se lanza desde el piso verticalmente hacia arriba con velocidad $40\hat{j}$ m/s. Identifique las proposiciones incorrectas. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- I. Tiempo de subida: 4 s
- II. Tiempo de bajada: 4 s
- III. Altura máxima: 80 m
- IV. Longitud recorrida hasta retornar al piso: 0 m

Resolución

3. Un objeto se suelta desde cierta altura H y se observa que durante el penúltimo segundo de su MVCL recorre $\frac{H}{3}$. Determine la altura H . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

2. Se sueltan dos piedras desde la misma altura, la segunda de estas un segundo después de la primera. Determine la separación, en m, entre las piedras 5 segundos después de soltar la primera.

Resolución

4. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba; duplica su rapidez después de 6 s. ¿Qué distancia corresponde a dicho intervalo de tiempo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Nivel II

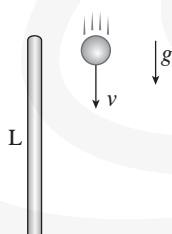
5. Durante una prueba, una persona cae libremente desde un helicóptero que se encuentra en reposo a 600 m de altura. Si esta lleva consigo un propulsor que le permite variar su rapidez en 2 m/s por cada segundo, determine la altura a la cual debe activarse el propulsor para que la persona se pose suavemente sobre el suelo. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

7. En el instante en que un globo aerostático que asciende con una rapidez de 10 m/s se encuentra a 120 m del piso, desde él se suelta una piedra. ¿Luego de cuántos segundos la piedra impactará en el piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

6. Una esfera, ubicada a 88 m del piso, se lanza tal como se muestra, en el instante en que se suelta una barra de 8 m de largo. Si la esfera y la barra llegan simultáneamente al piso, determine el módulo de la velocidad de lanzamiento de la esfera. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución

8. Se muestra una esferita que experimenta un MPCL. Determine el tiempo que demora en ir de A hacia B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



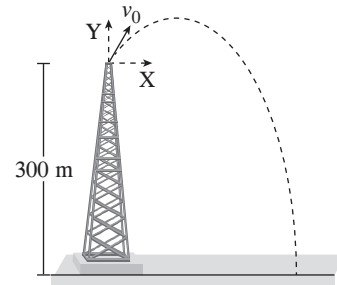
Resolución

Nivel III

9. Desde una altura de 2 m sobre el piso se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 10 m/s y una inclinación de 53° sobre la horizontal. Determine el alcance horizontal, en m, del proyectil. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

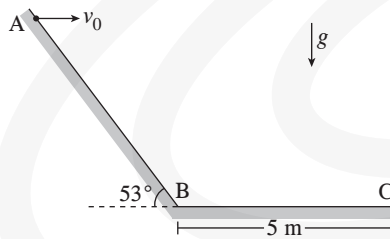
Resolución

11. Desde la parte alta de una torre de 300 m de altura se dispara un proyectil en $t = 0 \text{ s}$ con una velocidad $\vec{v} = (35\sqrt{3}\hat{i} + 35\hat{j}) \text{ m/s}$. Determine el instante, en s, en que el proyectil llega a tierra. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



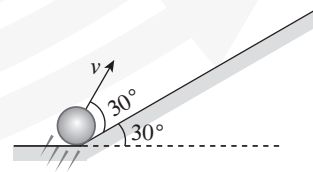
Resolución

10. En cuerpo se lanza horizontalmente como se muestra, con una rapidez de 10 m/s e impacta en el punto C. Determine la máxima longitud de AB, en m. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución

12. Determine el alcance que logra la esferita sobre el plano inclinado. ($v = 90 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)



Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Desde el piso se lanzan pelotas verticalmente hacia arriba cada 2 s con velocidad de 147 m/s. Determine el número máximo de pelotas, todas en el aire al mismo tiempo, que se puedan contar. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

Resolución

3. Desde cierta altura se lanza una esfera hacia arriba con $5\hat{j} \text{ m/s}$. ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la esfera cuando se encuentra a 30 m por debajo del nivel de lanzamiento? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Nivel II

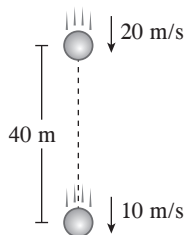
2. Un cuerpo se deja caer libremente desde una cierta altura recorriendo en el último segundo de su caída la mitad del camino total. ¿Desde qué altura cae el cuerpo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

4. Desde un globo aerostático que sube con una velocidad constante de 20 m/s se suelta una esfera. Si la esfera tardó 6 s hasta que choca en el piso, ¿desde qué altura respecto del piso se soltó la esfera? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

5. Dos esferas son lanzadas simultáneamente tal como se muestra. Determine luego de cuántos segundos chocan. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

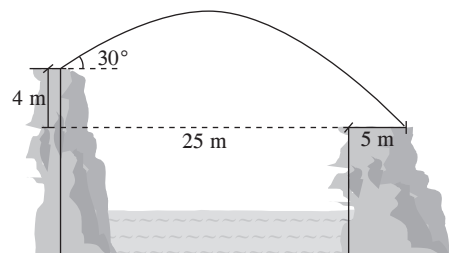


Resolución

6. Un proyectil es lanzado desde la superficie terrestre con un ángulo de elevación de 37° y logra un desplazamiento horizontal de 240 m hasta que impacta en tierra. Determine la rapidez, en m, con que fue lanzado. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

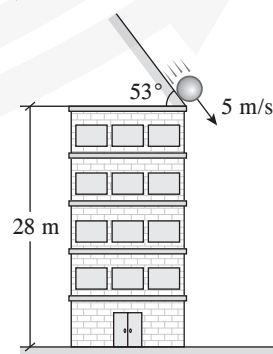
Resolución

7. Un arquero quiere efectuar un tiro parabólico entre dos acantilados tal y como se indica en la figura. El acantilado de la izquierda se halla 4 m por arriba con respecto al de la derecha. Si el arquero solo puede disparar con un ángulo de 30° y quiere lanzar las flechas a 5 m del acantilado de la derecha, determine con qué velocidad mínima ha de lanzarlas.



Resolución

8. La esfera pequeña abandona el techo del edificio tal como se muestra. Determine a qué distancia de la base del edificio la esfera impacta en el piso. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



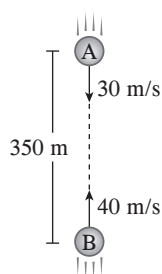
Resolución



Test 1

Nivel I

- Determine la rapidez, en m/s, con la que debe lanzarse un cuerpo desde la azotea de un edificio de 50 m de altura para que llegue al piso en 3 segundos. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 0,72 B) 1,36 C) 1,67
D) 2,15 E) 2,25
- Si las dos esferas son lanzadas simultáneamente, determine cuánto descende la esfera A hasta que se produce el choque. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 120 m B) 175 m C) 200 m
D) 275 m E) 300 m

Nivel II

- Determine la altura, en m, desde la que se debe soltar un cuerpo para que recorra 35 m en el último segundo de la caída libre. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 20 B) 40 C) 60
D) 80 E) 100

- Un proyectil se lanza desde la superficie terrestre formando un ángulo θ con la horizontal, de modo que su altura máxima es 60 m y su alcance horizontal 240 m. Determine la medida del ángulo θ .
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

Nivel III

- Desde el borde de la azotea de un edificio de 60 m se lanza una pelota con una velocidad $(30\hat{i} + 20\hat{j}) \text{ m/s}$. ¿A qué distancia de la base del edificio impactará la esfera en el piso? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
A) 100 m B) 120 m C) 150 m
D) 180 m E) 200 m



Test 2

Nivel I

1. Cuando el cronómetro marca 10 s, desde lo alto de un edificio se lanza una esferita verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s y llega al piso cuando el cronómetro marca 16 s. Considerando que solo actúa la gravedad ($g = 10 \text{ m/s}^2$), determine la rapidez, en m/s, con la que llega al piso.

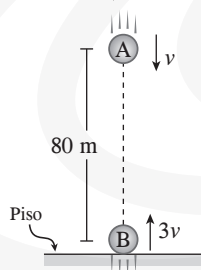
A) 30 B) 40 C) 60
D) 20 E) 50

2. Desde la superficie terrestre se lanza un proyectil con cierta inclinación. Si este permanece 20 s en el aire, determine la máxima altura que consiguió el proyectil, en m. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

A) 200 B) 100 C) 1000
D) 500 E) 250

Nivel II

3. Las esferas A y B se mueven a lo largo de la misma línea vertical como se indica. Si estas chocan después de 2 s de la posición mostrada, ¿a qué altura del piso chocan? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



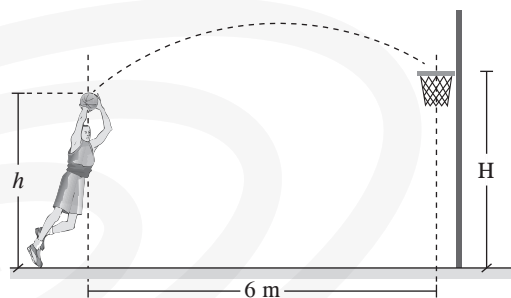
A) 10 m B) 20 m C) 30 m
D) 40 m E) 50 m

4. Steven está en el borde de un acantilado cuando una piedra se desprende y cae directamente hacia abajo hasta llegar a un lago. Siete segundos después oye el sonido producido por la piedra al llegar al agua. La rapidez del sonido es de 340 m/s. ¿Qué altura, en m, tiene aproximadamente el acantilado? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

A) 150 B) 180 C) 205
D) 230 E) 260

Nivel III

5. Un jugador de básquetbol lanza una pelota con una velocidad inicial de $6\hat{i} + 8\hat{j}$ hacia el centro del aro, como se muestra en la figura. Determine la velocidad con que la pelota pasa por el aro. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

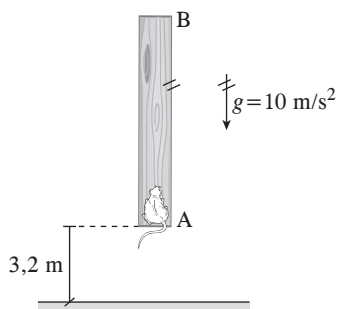


A) $3\hat{i} + 4\hat{j}$ B) $6\hat{i} - 2\hat{j}$ C) $3\hat{i} - 2\hat{j}$
D) $6\hat{i} + 2\hat{j}$ E) $2\hat{i} - 4\hat{j}$



Helicodesafío

1. Se muestra el instante en que se suelta una tabla de longitud L y un pequeño roedor se mueve desde el extremo A hacia el otro extremo (B), con una rapidez constante de 3 m/s respecto a la tabla. Determine la longitud L sabiendo que la barra impacta con el piso cuando el roedor llega al extremo B.



- A) 1,2 m B) 3,6 m C) 2,4 m
D) 0,9 m E) 1,5 m

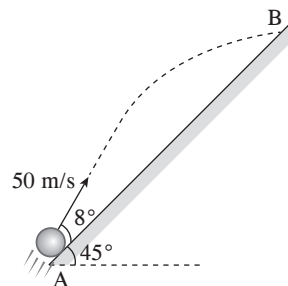
2. Dos observadores, A y B, están colocados en la parte superior e inferior de un pozo, respectivamente. El observador A da una señal mediante una campana y B al oírla dispara verticalmente una bala hacia arriba. A anota el instante en que oye el disparo y el instante en que sale la bala del pozo. Si transcurren 2 s desde que A da la señal hasta que logra escuchar el disparo, ¿cuál es la profundidad, en m, del pozo y la rapidez, en m/s, de lanzamiento de la bala, respectivamente? ($v_{\text{sonido}} = 340 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$; considere que la bala sale del pozo 1 s después de que A escucha el disparo).

- A) 340; 129,8 B) 170; 159,8
C) 170; 179,8 D) 340; 179,8
E) 340; 149,8

3. Jair lanza verticalmente hacia arriba dos esferas, A y B, con 14 m/s y 72 m/s , respectivamente. ¿Con qué rapidez, en m/s, habrá que lanzar verticalmente una tercera esfera C en el mismo instante que las anteriores, para que cuando A alcance su altura máxima, C esté a una altura igual a la diferencia de alturas entre A y B. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

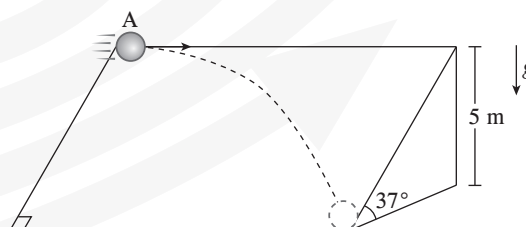
- A) 65 B) 75 C) 84
D) 94 E) 114

4. Una esfera se lanza en A con una velocidad de módulo 50 m/s . Determine el tiempo que emplea la piedra para impactar en B y el alcance que logra sobre el plano inclinado. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 2 s y $30\sqrt{2} \text{ m}$ B) 3 s y $40\sqrt{2} \text{ m}$
C) 2 s y $40\sqrt{2} \text{ m}$ D) 3 s y $60\sqrt{2} \text{ m}$
E) 2 s y $60\sqrt{2} \text{ m}$

5. La figura muestra un plano inclinado de 37° con respecto a la horizontal. Desde el punto A respecto a la horizontal se lanza una partícula con una velocidad de $2\hat{i} \text{ m/s}$, la partícula se mueve en el plano liso hasta llegar a la base. Determine su desplazamiento horizontal, en m. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- A) 3,37 B) 3,50 C) 3,72
D) 4,18 E) 4,20

MOVIMIENTO CIRCULAR



Objetivos

- Conoce y determina las cantidades cinemáticas angulares.
- Relaciona las cantidades cinemáticas lineales con las angulares.



Sabías que...

La Tierra gira más y más lento

La Tierra gira sobre sí misma, alrededor de un eje, la velocidad en el ecuador es 1674,364 km/h, este eje se orienta hacia el Polo Norte celeste. Durante mucho tiempo, la rotación de la Tierra fue considerada la medida más precisa del paso de tiempo, pero su velocidad varía con el tiempo.

La velocidad de rotación de la Tierra no es regular, se producen con bastante frecuencia pequeñas crisis.

Los segundos desaparecen o más bien aparecen minutos de 61 segundos. Desde la década de 1960, han desaparecido 34 segundos debido a la desaceleración imperceptible de la rotación de nuestro planeta alrededor de su eje.

Muchos fenómenos tienden a retardar la velocidad de rotación. Desde el núcleo metálico hasta la atmósfera, cada capa gira de manera desigual, imponiendo su ritmo a la otra.

El manto de la Tierra se somete a las fuerzas gravitatorias de la Luna, los efectos de la marea y reduzcan regularmente, ya que miles de millones de años, nuestra rotación.

Toda la Tierra sufre los caprichos de las fuerzas gravitacionales del sistema solar, incluyendo planetas y el Sol.

La deriva continental, las corrientes oceánicas, los fenómenos meteorológicos y los terremotos pueden cambiar el periodo en unos pocos microsegundos de la rotación de la Tierra, ya sea acelerándolo o desacelerándolo.

Nuestra Tierra se “tambalea” en el tejido de cuatro dimensiones del espacio-tiempo, como en la superficie de un trampolín gigante modificado por la gravitación de los planetas, el Sol y las estrellas. Esta deformación de permanente curvatura o del espacio-tiempo crea las ondas caóticas de la gravedad. Por otra parte, la definición de segundo, que data de 1967, comprende 9 192 631 770 oscilaciones de un átomo de cesio-133, pero el segundo no divide perfectamente el día astronómico. Queda un pequeño error que se suma a todas las demás fluctuaciones.

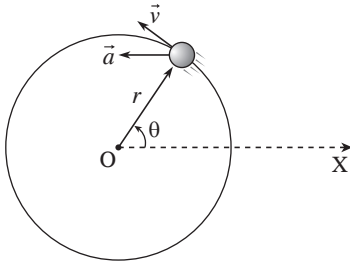




MOVIMIENTO CIRCULAR

Se define este movimiento con las siguientes características:

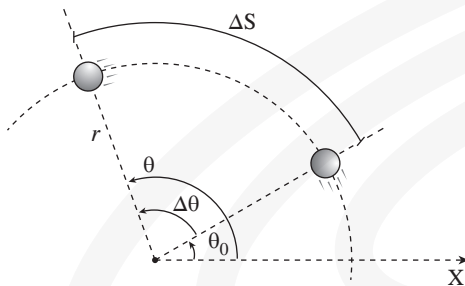
- La trayectoria es una circunferencia.
- El movimiento se analiza en coordenadas polares (r, θ).



$\vec{r}$: radio vector (variable)

$|\vec{r}| = r$: radio (constante)

Cantidades cinemáticas angulares

1. Desplazamiento angular ($\Delta\theta$)

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \quad \text{Unidad: rad}$$

Posición angular final $\leftarrow$ Posición angular inicial

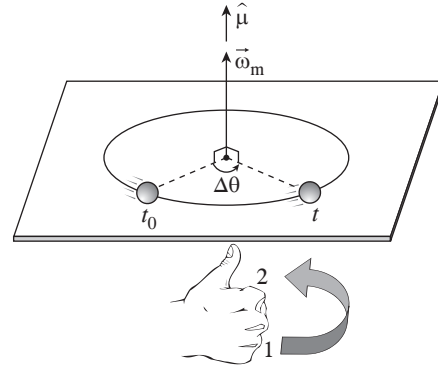
Además

$$\Delta S = \Delta\theta \cdot r \quad \text{Unidad: m}$$

ΔS : longitud recorrida o recorrido
(medida longitudinal de la trayectoria)

2. Velocidad angular media ($\vec{\omega}_m$)

Cantidad física vectorial que mide la rapidez con la cual se da el cambio de la posición angular en un intervalo de tiempo.



$$\vec{\omega}_m = \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \hat{\mu} \quad \text{Unidad: rad/s}$$

$\hat{\mu}$: vector unitario perpendicular al plano.

Se determina con la regla de la mano derecha (RMD).



Anotación

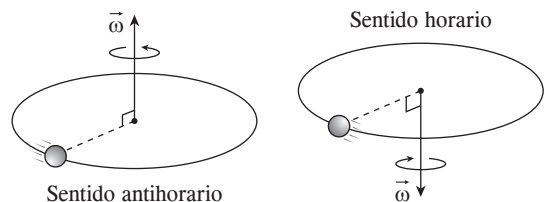
$\vec{\omega}_m \perp$ (al plano del movimiento)

3. Velocidad angular instantánea ($\vec{\omega}$)

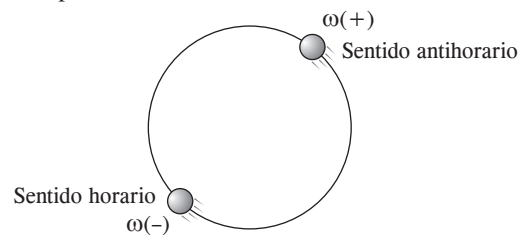
(Velocidad angular)

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \hat{\mu} \quad \text{Unidad: rad/s}$$

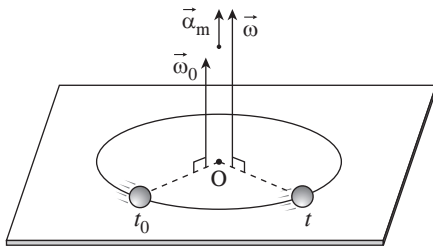
Nos indica la posible tendencia de cambio de la posición angular en un instante de tiempo.



En el plano



4. Aceleración angular media ($\vec{\alpha}_m$)



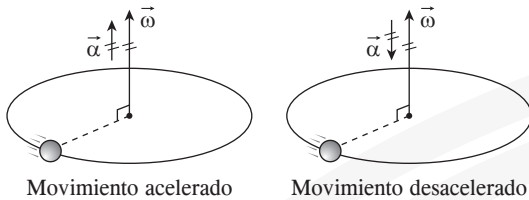
$$\vec{\alpha}_m = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t} \quad \text{Unidad: rad/s}^2$$

Tener en cuenta: $\vec{\alpha}_m \parallel \Delta \vec{\omega}$

$\vec{\alpha}_m \perp$ (al plano del movimiento)

5. Aceleración angular instantánea ($\vec{\alpha}$)

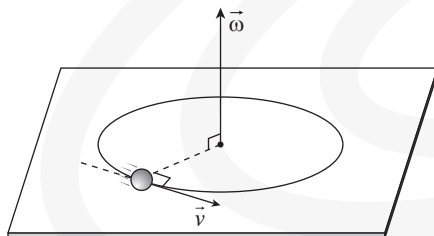
$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \quad \text{Unidad: rad/s}^2$$



Movimiento acelerado

Movimiento desacelerado

Relación entre las cantidades lineales y cantidades angulares



Se cumple:

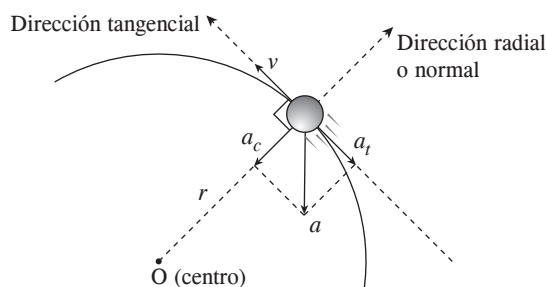
$$v = \omega \cdot r$$

Demostración

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta \cdot r}{\Delta t}$$

$$v = \omega \cdot r$$

Además: $\vec{\omega} \perp \vec{v}$



$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

a_c : aceleración centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{Unidad: m/s}^2$$

a_t : aceleración tangencial

$$a_t = \alpha \cdot r \quad \text{Unidad: m/s}^2$$

Demostración

$$a_t = \frac{v_{tf} - v_{ti}}{\Delta t} = \frac{\omega_F \cdot r - \omega_0 \cdot r}{\Delta t}$$

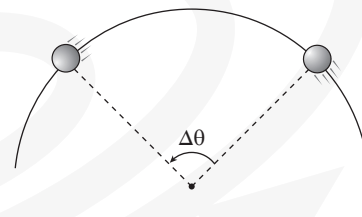
$$a_t = \left(\frac{\omega_F - \omega_0}{\Delta t} \right) r$$

$$a_t = \alpha \cdot r$$

Movimiento circular uniforme (MCU)

Se cumple

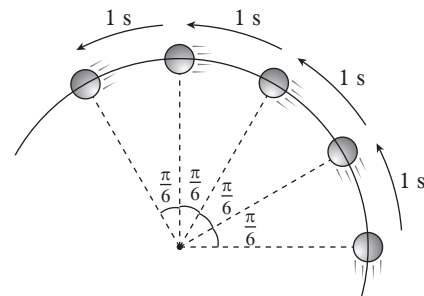
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_m = \text{constante}$$



$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \Delta \theta = \omega \cdot \Delta t$$

Ejemplo



Observamos

- Trayectoria circular
- En intervalos de tiempos iguales, los desplazamientos angulares son iguales.

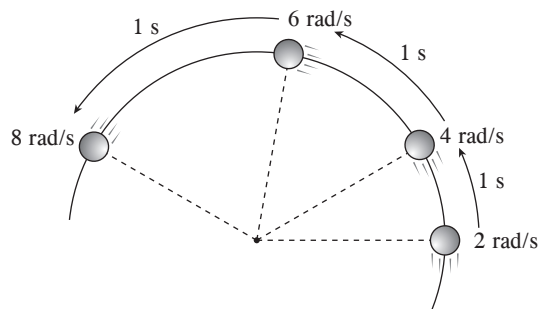
$$\omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$$

- El intervalo de tiempo que demora en dar una vuelta se denomina periodo (T).

Movimiento circular uniformemente variado (MCUV)

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_m = \text{constante}$$

Ejemplo

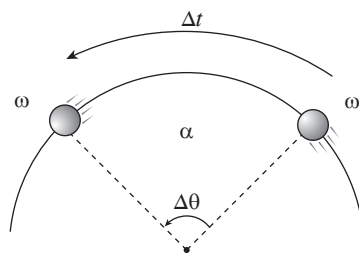


Observamos

- En intervalos de tiempos iguales, la variación de la velocidad angular es la misma.

$$\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$$

Ecuaciones en el MCV



$$\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha \cdot t$$

$$\Delta\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} \right) t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta\theta$$

Donde

(+): movimiento acelerado

(-): movimiento desacelerado



Helicóptesis

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

Características

Se da en una trayectoria circular.

Se analiza en coordenadas polares.

(Su orientación se determina con la regla de la mano derecha)

$\vec{\omega}$, $\vec{v}$ y $\vec{r}$ son mutuamente perpendiculares.

$\vec{\omega}$: velocidad angular $\rightarrow \omega_{media} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\vec{v}$: velocidad (velocidad tangencial)

$\vec{\alpha}$: aceleración angular

$\vec{r}$: radio vector (variable)

$|\vec{r}| = r$: radio (constante)

MCU

$\alpha = 0$
 $\vec{\omega}$: constante
 T: periodo
 $\omega_{media} = \omega_{instantánea}$

$v = \omega \cdot r$
 $a = a_{cp} = \frac{v^2}{r}$: Módulo constante

MCUV

$\vec{\alpha}_m = \text{constante}$
 $\vec{\alpha}_m = \vec{\alpha}_{instantánea}$
 $\vec{\alpha}_m = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t}$

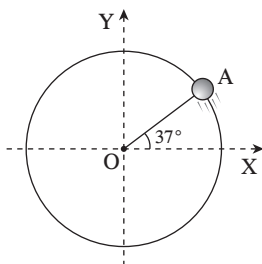
- Si $\vec{\omega}$ es paralelo a $\vec{\alpha}$: movimiento acelerado
- Si $\vec{\omega}$ es antiparalelo a $\vec{\alpha}$: movimiento desacelerado
- Ecuaciones en el MCVU
 - $\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$
 - $\omega = \omega_0 \pm \alpha \cdot t$
 - $\Delta\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} \right) t$
 - $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha \cdot \Delta\theta$

- $a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$
- $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$
- $a_t = \alpha \cdot r$



Problemas resueltos

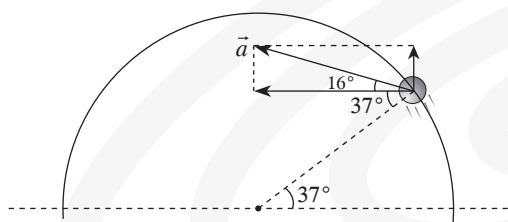
1. Una partícula se mueve por una trayectoria circular de radio 5 m. Si al pasar por A, su aceleración es $\vec{a} = \left(-\frac{24}{5}\hat{i} + \frac{7}{5}\hat{j}\right) \text{ m/s}^2$, determine aproximadamente para ese instante su rapidez, en m/s. (UNI 2018-I)



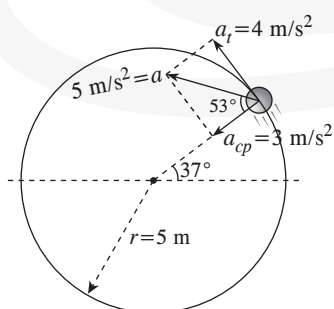
Resolución

Dato: $\vec{a} = \left(-\frac{24}{5}\hat{i} + \frac{7}{5}\hat{j}\right) \text{ m/s}^2 \rightarrow |\vec{a}| = 5 \text{ m/s}^2$

Recuerde



Realizamos la descomposición de la aceleración en sus componentes tangencial y centrípeta.



Sabemos

$$a_c = \frac{v_t^2}{r}$$

$$v_t = \sqrt{a_{cp} \cdot r}$$

$$v_t = \sqrt{(3 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})}$$

$$v_t = 3,87 \text{ m/s}$$

Rpta.: 3,87 m/s

2. Un satélite terrestre realiza un MCU. El satélite gira alrededor de la Tierra a 644 km de la superficie terrestre. El tiempo que tarda en dar una vuelta (período) es de 98 minutos. Determine aproximadamente la magnitud de la aceleración del satélite, en m/s^2 . ($R_{\text{Tierra}} = 6378 \text{ km}$) (UNI 2017-II)

Resolución

Datos: $R_T = 6378 \text{ km}$

$h = 644 \text{ km}$

$T = 98 \text{ min}$

Nos piden: $a = ?$

Como el satélite realiza un MCU, la aceleración que experimenta es centrípeta, donde

$$a_{cp} = \omega^2 r$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (R_T + h)$$

Reemplazando datos

$$a = \left(\frac{2 \times 3,1416}{98 \times 60}\right)^2 (6378 + 644)(10^3)$$

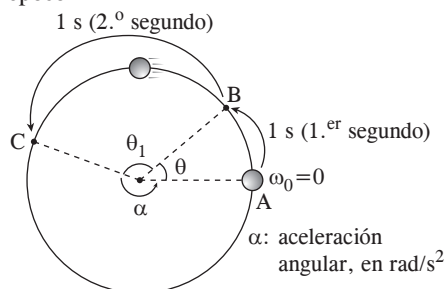
$$\therefore a \approx 8 \text{ m/s}^2$$

Rpta.: 8 m/s^2

3. Una partícula realiza un movimiento circular uniformemente variado partiendo del reposo. Si la partícula efectuó 4 vueltas en el primer segundo, determine el número de vueltas que realizó en el siguiente segundo. (UNI 2013-I)

Resolución

Reduzcamos un MCUV en el que la partícula parte del reposo.



De A $\rightarrow$ B

$$\theta = \omega_0 \cdot t_{AB} + \frac{\alpha \cdot t_{AB}^2}{2}$$

$$\theta = 0 \times 1 + \frac{\alpha}{2} \times 1^2$$

$$\theta = \frac{\alpha}{2}$$

De A $\rightarrow$ C

$$\theta + \theta_1 = \omega_0 \cdot t_{AC} + \frac{\alpha \cdot t_{AC}^2}{2}$$

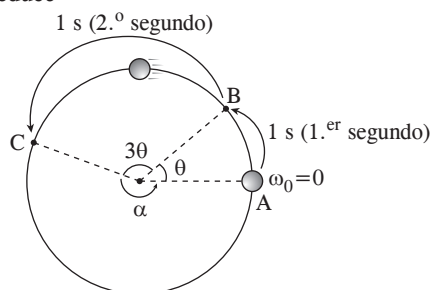
$$\theta + \theta_1 = 0 \times 2 + \frac{\alpha}{2} \times 2^2$$

$$\theta + \theta_1 = \frac{4\alpha}{2}$$

$$\theta + \theta_1 = 4\theta$$

$$\theta_1 = 3\theta$$

Se deduce



En el problema, en el 1.^{er} segundo, la partícula efectuó

$$\theta = 8\pi = 4 \text{ vueltas}$$

En el 2.^o segundo, la partícula efectuó

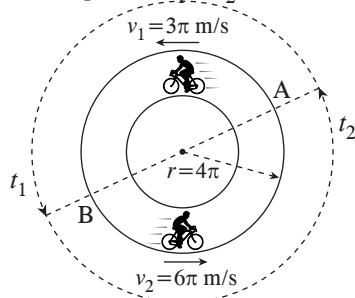
$$\therefore 3\theta = 24\pi = 12 \text{ vueltas}$$

Rpta.: 12

4. Un ciclista decide dar una vuelta alrededor de una plaza circular en una trayectoria de radio constante $r = 4\pi$ metros en dos etapas. La primera media vuelta con una rapidez constante de 3π m/s y la segunda media vuelta con una rapidez constante de 6π m/s. Determine con qué aceleración tangencial constante, en m/s^2 , debería realizar el mismo recorrido a partir del reposo para dar la vuelta completa en el mismo tiempo. (UNI 2011 - II)

Resolución

Sea a_t la aceleración tangencial de magnitud constante con la que el ciclista debe dar la vuelta a la plaza en un tiempo total $t_1 + t_2$.



Aplicando la ecuación del MCUV

$$e = v \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$$

$$2\pi r = (0)(t_1 + t_2) + \left(\frac{a_t}{2}\right)(t_1 + t_2)^2 \quad \dots (1)$$

Determinemos t_1 y t_2

Aplicando MCU (en la primera media vuelta)

$$e_{A \rightarrow B} = v_1 \cdot t_1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(2\pi r) &= 3\pi \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{r}{3} \\ e_{B \rightarrow A} &= v_2 \cdot t_2 \\ \frac{1}{2}(2\pi r) &= 6\pi \cdot t_2 \rightarrow t_2 = \frac{r}{6} \end{aligned} \right\} t_1 + t_2 = \frac{r}{2}$$

Reemplazando en (1)

$$2\pi r = \frac{a_t}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \rightarrow 2\pi = \frac{a_t}{2} \cdot \left(\frac{r}{4}\right)$$

$$\text{Pero: } r = 4\pi \text{ m} \rightarrow 2\pi = \frac{a_t}{2} \cdot \frac{4\pi}{4}$$

$$\therefore a_t = 4 \text{ m/s}^2$$

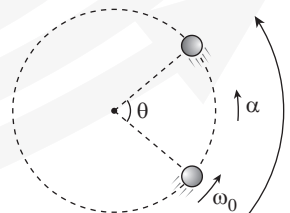
Rpta.: 4 m/s²

5. Una masa puntual empieza su movimiento desde el reposo en una circunferencia de 5 m de radio, con aceleración tangencial constante y completa la primera vuelta en 1 s. Determine el tiempo, en s, que tarda en dar la primera media vuelta.

Resolución

En el MCUV, el módulo de la aceleración tangencial y angular permanece constante.

El ángulo barrido (θ) se determina así

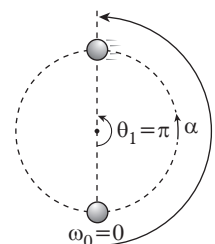


$$\theta = \omega_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \quad \dots (1)$$

 ω_0 : rapidez angular inicial α : aceleración angular

En el problema, la partícula experimenta aceleración tangencial constante, por ello realiza un MCUV.

Sea t el tiempo que demora la partícula en dar media vuelta.

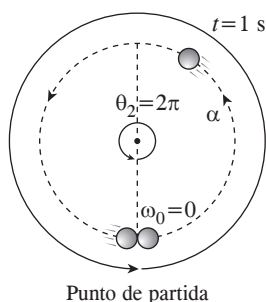


Como el módulo de la aceleración tangencial es constante, la partícula realiza un MCUV, aplicamos B.

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \rightarrow \pi = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \quad \dots (2)$$

$$t = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$$

Ahora, en una vuelta



$$\theta_2 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \rightarrow 2\pi = \frac{1}{2} \alpha (1)^2$$

$$\alpha = 4\pi \text{ rad/s}^2 \quad \dots (3)$$

(3) en (2)

$$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ s}$$

Rpta.: $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ s}$



Helicopráctica

Nivel I

- Respecto a las cantidades físicas relacionadas con el movimiento circular, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - El radio vector es una cantidad física constante. ()
 - La velocidad angular es un vector paralelo al plano de giro. ()
 - La aceleración angular siempre es paralela a la velocidad angular. ()

Resolución

- Una partícula se mueve sobre una circunferencia efectuando un desplazamiento angular de $\frac{\pi}{4}$ rad durante 4 s de su movimiento y un desplazamiento angular de $\frac{\pi}{8}$ rad durante los siguientes 6 s de su movimiento. Determine la magnitud de la velocidad angular media, en rad, durante 10 s.

Resolución

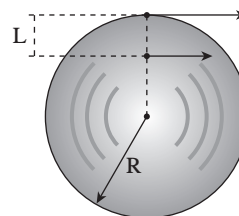
3. Una partícula realiza un movimiento circular uniforme. Si su posición inicial respecto a un observador fijo que se encuentra en el centro de rotación es $r = (9\hat{i} + 12\hat{j})$ m y luego de cierto intervalo su velocidad es $v = \pi(24\hat{i} + 7\hat{j})$ m/s, determine el periodo del movimiento, en s.

Resolución

4. Una partícula en MCU demora 10 s para que su vector posición experimente un desplazamiento angular de 120° . Determine su rapidez, en m/s, en la posición $(7\hat{i} + 24\hat{j})$ m si la trayectoria de la partícula tiene centro en el origen de coordenadas.

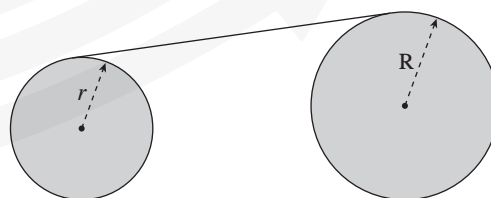
Resolución

5. Un disco gira con velocidad angular constante. La velocidad lineal de los puntos periféricos del disco es 6 m/s y la velocidad de los puntos una distancia $L = 0,15$ m más cerca al eje es 5,5 m/s. Determine la longitud del radio R del disco, en m.



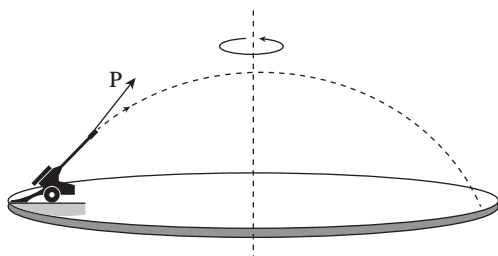
Resolución

6. Un par de poleas de radio $R = 20$ cm y $r = 5$ cm, giran por acción de una faja C. Si el movimiento de cada polea es uniforme y el periodo de rotación de la polea mayor es 8 segundos, ¿cuál es el periodo, en s, de la polea de radio menor?



Resolución

7. Desde los bordes de una plataforma circular, con un cañón se dispara un proyectil con velocidad $v = (5\hat{i} + 2\hat{j})$ m/s en el preciso instante en que la plataforma empieza a girar con velocidad angular constante, como se muestra en la figura. Si al caer el proyectil impacta sobre el cañón, determine la rapidez angular mínima de la plataforma.



Resolución

8. Una partícula gira en una circunferencia de 3 m de diámetro. Si en el instante $t = 0$ s, su rapidez es de 9 m/s. Determine el ángulo que describe la partícula al cabo de 6 s si en ese instante alcanzó la rapidez de 11 m/s, acelerando uniformemente.

Resolución

Nivel III

9. Una partícula que parte del reposo realizando un MCUV, en el primer segundo ha recorrido una longitud igual al radio de la trayectoria. Determine la rapidez angular, en rad/s, un segundo después.

Resolución

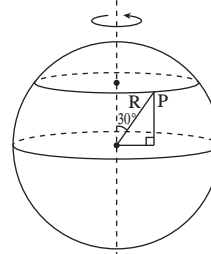
10. Determine la magnitud de la aceleración angular, en rad/s^2 , con la que una partícula debe iniciar, desde el reposo, su MCUV para que luego de 10 segundos sus aceleraciones tangencial y centrípeta sean de igual magnitud.

Resolución

11. En cierto instante, el vector velocidad de una partícula tiene una magnitud de 10 m/s y forma un ángulo de 53° con el vector aceleración, cuyo módulo es 5 m/s^2 . Determine el radio de la trayectoria.

Resolución

12. Una esfera de 4 m de radio empieza a girar en $t = 0 \text{ s}$ con aceleración angular constante de 2 rad/s^2 . Si después de cierto tiempo t , en s , la aceleración centrípeta del punto P es igual a 50 veces su aceleración tangencial, determine el instante t .



Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Con relación a las siguientes afirmaciones, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
- La aceleración angular es un vector paralelo a la velocidad angular cuando el movimiento es acelerado. ()
 - La velocidad angular es un vector perpendicular al vector velocidad. ()
 - La aceleración angular es un vector paralelo al vector aceleración tangencial. ()

Resolución

2. La Estación Espacial Internacional gira con velocidad angular constante alrededor de la Tierra cada 90 minutos en una órbita a 300 km de altura sobre la superficie terrestre. Determine la magnitud de la velocidad angular, en rad/s . ($R_{\text{Tierra}} = 6370 \text{ km}$)

Resolución

3. La Luna da una vuelta a la Tierra en 27,3 días; en una órbita casi circular con un radio de $3,8 \times 10^5$ km. Suponiendo que el movimiento orbital de la Luna es un movimiento circular uniforme, ¿qué aceleración tiene la Luna al “caer” hacia la Tierra?

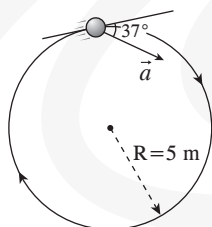
Resolución

5. Un móvil que describe una trayectoria circular de radio 2 m desarrolla un movimiento uniformemente variado. En un instante dado, su aceleración centrípeta tiene un módulo de 2 m/s^2 . Si 4 s después su rapidez angular es 9 rad/s , determine el módulo de la aceleración angular, en rad/s^2 .

Resolución

Nivel II

4. En el instante mostrado en la figura, una partícula que se mueve con MCVU tiene una rapidez de 30 m/s y aceleración $\vec{a}$ que hace 37° con la tangente a la trayectoria. Determine $|\vec{a}|$.



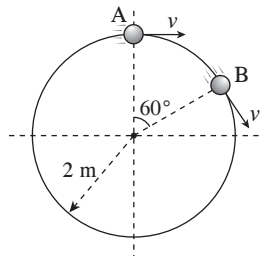
Resolución

6. Un cuerpo parte del reposo y se mueve sobre una circunferencia de 18 m de radio con una aceleración tangencial de 2 m/s^2 . Determine el tiempo, en s, que debe transcurrir para que la aceleración normal del cuerpo sea igual a 3 veces su aceleración tangencial.

Resolución

Nivel III

7. La figura muestra la trayectoria circular de una partícula que se mueve con rapidez constante v . Si entre A y B se tiene que $|\vec{v}| = 8 \text{ m/s}$, determine el periodo, en s, del movimiento.



Resolución

8. La hélice de un motor realiza un MCUV según la ecuación $\theta = (5t + 3t^2) \text{ rad}$. Determine su rapidez angular luego de 3 s de iniciar su aceleración.

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Con relación al movimiento circular, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- En una partícula que describe un MCU, la aceleración que experimenta es constante. ()
- La magnitud del vector posición de la partícula con respecto al centro de giro (radio vector) varía en cada instante de tiempo. ()
- En el MCU o en el MCUV, la velocidad angular, la aceleración centrípeta y la velocidad lineal son siempre perpendiculares entre sí. ()

- A) VVV B) VFF C) FFF
D) VFV E) FFV

2. Un disco rota uniformemente alrededor de un eje que pasa perpendicularmente por su centro. Los puntos en la periferia del disco se mueven a razón de $0,4 \text{ m/s}$ y los puntos a 2 cm de la periferia lo hacen a $0,3 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la rapidez angular, en rad/s , con que gira el disco?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Nivel II

3. En un fin de semana, Lucho con sus amigos concurren a un parque de diversiones en el que se encuentra una montaña rusa de una altura de 25 m , como tiene acrofobia deciden subir a un carrusel que acelera uniformemente desde el reposo y alcanza su rapidez de $2,5 \text{ rpm}$ en 3 s . ¿Qué magnitud tiene su aceleración angular?

- A) $0,06 \text{ rad/s}^2$ B) $0,09 \text{ rad/s}^2$
C) $0,12 \text{ rad/s}^2$ D) $0,15 \text{ rad/s}^2$
E) $0,18 \text{ rad/s}^2$

4. Los satélites artificiales son objetos de fabricación humana que se han colocado en órbita alrededor de la Tierra y, dependiendo de su uso, tienen diferentes periodos orbitales. Por ejemplo, si para las empresas celulares con tecnología GPS, el periodo orbital es de 14 horas, ¿cuál es la magnitud de la velocidad lineal con la que gira el satélite? ($R_{\text{Tierra}} = 6 \times 10^6 \text{ m}$)
- A) 755 m/s B) 723 m/s C) 736 m/s
D) 748 m/s E) 718 m/s

Nivel III

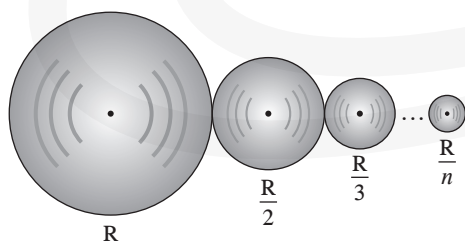
5. Una partícula describe un movimiento circular uniformemente acelerado de 1 m de radio. Si en el instante en que el vector aceleración total hace un ángulo de 53° con el vector velocidad su rapidez es 2 m/s, determine la magnitud de la aceleración tangencial en ese instante.
- A) 1 m/s^2 B) 2 m/s^2 C) 3 m/s^2
D) 4 m/s^2 E) 5 m/s^2



Test 2

Nivel I

1. Teniendo en cuenta que la Tierra gira alrededor del Sol en 365,25 días y que el radio de giro medio es de $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$, determine la magnitud de la velocidad a la que viaja aproximadamente alrededor del Sol.
- A) 19 800 m/s B) 27 800 m/s C) 29 800 m/s
D) 34 500 m/s E) 34 600 m/s
2. Se tiene n discos giratorios tangentes, el uno a continuación del otro, tal como se indica en la figura, siendo sus radios $R; \frac{R}{2}; \frac{R}{3}; \dots; \frac{R}{n}$. Si el disco de mayor radio gira con rapidez angular ω , ¿cuál será la rapidez angular del n -ésimo disco?



- A) $(n+1)\omega$ B) $(n-1)\omega$ C) $n \cdot \omega$
D) $\frac{\omega}{n}$ E) $\frac{\omega}{n+1}$

Nivel II

3. Una rueda dentada del engranaje de una máquina rotativa experimenta un movimiento de rotación uniformemente variado, tal que la velocidad angular aumenta 5 rad/s en cada segundo. Si luego de 4 s su velocidad llegó a ser 40 rad/s , ¿qué ángulo, en radianes, habrá girado en dicho tiempo?
- A) 90 B) 100 C) 110
D) 120 E) 130
4. Una partícula se mueve con MCUV según la ecuación $\theta = 2\pi t + 3\pi t^2$. Determine la rapidez angular, en rad/s , de esta partícula para el instante $t = 4 \text{ s}$.
- A) 25π B) 26π C) 27π
D) 28π E) 29π

Nivel III

5. Un cuerpo inicia su movimiento circular alrededor de un eje fijo con aceleración angular de 4 rad/s^2 . ¿Después de qué tiempo el vector aceleración total forma por primera vez un ángulo de 45° con el vector velocidad?
- A) 0,3 s B) 0,4 s C) 0,5 s
D) 0,6 s E) 1,0 s



Helicodesafío

1. Un cierto instante, la posición de una partícula en MCU respecto al centro de la trayectoria es $(2\hat{j} + a\hat{k})\text{ m}$ y su velocidad es $(-5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})\text{ m/s}$. Si la magnitud de su velocidad angular es 3 rad/s , determine su velocidad angular.

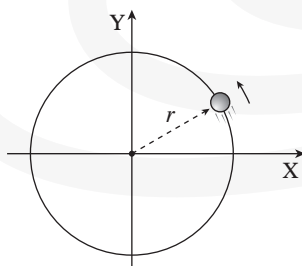
A) $(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ B) $(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$
 C) $(-\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ D) $(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$
 E) $(-2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

2. Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio $r = 2\text{ m}$ con MCU en el plano XY. Su posición angular varía con el tiempo de acuerdo a la ecuación $\theta = (0,5\pi + 2\pi t)\text{ rad}$, en donde t se mide en segundos. Si el movimiento es antihorario, determine su aceleración centrípeta en el instante $t = 0,5\text{ s}$; en m/s^2 .

A) $8\pi^2\hat{i}$ B) $-8\pi^2\hat{i}$ C) $4\pi^2\hat{i}$
 D) $-8\pi^2\hat{j}$ E) $8\pi^2\hat{j}$

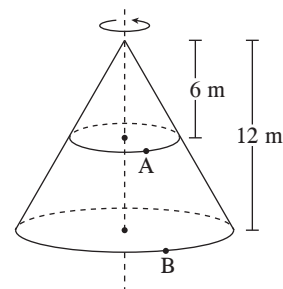
3. Una partícula de masa m describe una trayectoria circular tal como se muestra. Si en el instante que su vector posición es $\vec{r} = (6\hat{i} + 8\hat{j})\text{ m}$, su aceleración es de 5 m/s^2 en la dirección del eje X negativo, determine

- a. su aceleración tangencial y centrípeta.
 b. su rapidez en ese instante.



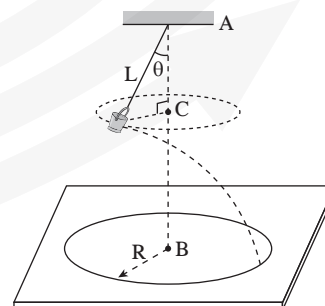
A) $a_t = 4\text{ m/s}^2$; $a_c = 3\text{ m/s}^2$; $v = \sqrt{5}\text{ m/s}$
 B) $a_t = 3\text{ m/s}^2$; $a_c = 4\text{ m/s}^2$; $v = 2\sqrt{10}\text{ m/s}$
 C) $a_t = 3\text{ m/s}^2$; $a_c = 4\text{ m/s}^2$; $v = \sqrt{30}\text{ m/s}$
 D) $a_t = 5\text{ m/s}^2$; $a_c = 5\text{ m/s}^2$; $v = \sqrt{3}\text{ m/s}$
 E) $a_t = 1\text{ m/s}^2$; $a_c = 2\text{ m/s}^2$; $v = \sqrt{10}\text{ m/s}$

4. Un cono gira con un periodo de 7 s . ¿En qué relación están las rapidezces en los puntos A y B, respectivamente?



A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) 3
 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

5. Un balde con agua gira en un plano horizontal con un periodo de $\frac{3\pi}{2}$ segundos y va derramando gotas de tal modo que estas describen una circunferencia de radio R en el piso. Si la longitud de la cuerda es $L = 5\text{ m}$, $AB = 9\text{ m}$ y $\theta = 37^\circ$, determine la longitud de R . ($g = 10\text{ m/s}^2$)



A) 1 m B) 2 m C) 3 m
 D) 4 m E) 5 m

QUÍMICA



QUÍMICA



Objetivos

- Define materia, clasifica y diferencia a la materia por sus propiedades.
- Explica la naturaleza de la sustancia, sus estados de agregación y sus cambios.



Curiosidades

Lectura

La **materia** y la **energía** forman el universo en que vivimos. La materia sustancial tiene masa y la energía o materia no sustancial carece de esta propiedad. La materia sustancial tiene **propiedades intensivas** como la densidad, la temperatura de ebullición, etc. (no dependen de la cantidad de materia) y propiedades **extensivas** como la masa, el volumen, la inercia, entre otras (sí dependen de la cantidad de materia). La materia sustancial se presenta en tres **estados de agregación: sólido, líquido** y gaseoso. Esta materia sustancial sufre cambios o fenómenos los cuales pueden ser **fenómeno físico** (dilatación, movimiento, etc.), fenómeno **químico** (oxidación, combustión, etc). Asimismo, existe el fenómeno **alotrópico** y el fenómeno nuclear. Además, la materia sustancial se puede clasificar en sustancia pura y mezcla. La **sustancia** pura puede ser simple o **elemento** químico (tiene **símbolo**). pero también compuesta o **compuesto** químico (tiene **fórmula**). La mezcla puede ser **homogénea** (solución) o **heterogénea** (coloides, suspensiones y agregados). Finalmente, los cambios de estado resultan al variar la temperatura y/o la presión. Estos cambios son la fusión, la **vaporización** (gasificación), **sublimación**, condensación (licuación), solidificación y deposición.

Actividad

De acuerdo a la lectura, busque las palabras en negrita en el pupiletras de la siguiente página.



Pupiletras

G N W V U O B W O N Z J H O Y G O W V V
 S E V I A G Z V Y O Ñ Q R X U A D W E H
 M G E O S P A T O I Y K E K B I I E R V
 Y T C M U V O M X S C R C O F C L E V V
 Z T Y A B O O R F U E C C Q H N O S H B
 M Ñ F D L M W J I F X I K H Z A S T I M
 A U W N I E Ñ L I Z M Ñ O H I T Ñ A R L
 T M N F M M O Y V I A I T Y X S I D Z P
 E U S I A O Q T U L C C T Q D U I O B A
 R U G S C N M Q E T K H I R F S R S B E
 I Q P I I E F O A E N E G O R E T E H N
 A A O C O F D V C T Y L Ñ L N J O V O E
 V A E O N I N T E N S I V A S V W L V G
 A V J R M D U S T O C I P O R T O L A O
 F T Ñ A N M U T O T S E U P M O C K B M
 S A V I S N E T X E B F R L I Q U I D O
 A O L O B M I S A I G R E N E H G V J H
 B S E D A D E I P O R P O A V G S I V R
 A G R E G A C I O N R D B P L V T M I W
 G W F E L E M E N T O R O A L U M R O F



MATERIA

MATERIA

La materia es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio, tiene masa y goza de la propiedad de inercia.

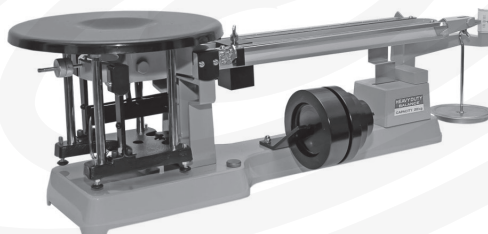
La materia es toda realidad objetiva y susceptible de cambios y transformaciones, que posee masa y dimensiones, observable directa o indirectamente, y que posee propiedades.

La materia se caracteriza por estar en constante movimiento en permanente transformación.

1. **Cuerpo.** Es una porción limitada de materia. Por ejemplo: una piedra, una pelota, un zapato, un poco de aceite, un poco de aire, un animal, un planeta, un mineral, etc.



2. **Masa.** Es la cantidad de materia que tiene un cuerpo, se expresa en kilogramos (kg) y se mide con la balanza. *Ejemplos:* Un lingote de oro de 1 kg, el alumno tiene 56 kg, el coche lleva 2500 kg de concreto, la molécula tiene una masa de $4,2 \times 10^{-26}$ kg, etc.



3. **Peso.** Es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre un cuerpo, se expresa en newtons (N) y se mide con el dinamómetro.

Los cuerpos tienen la misma masa en cualquier parte de la Tierra o del espacio, pero su peso varía dependiendo del lugar donde se mida. Un mismo cuerpo tiene mayor peso en los polos y menos peso en el Ecuador. Además, el peso depende de la atracción que ejerce el planeta (cuerpo celeste) sobre el cuerpo. En un planeta o satélite de mayor masa, el cuerpo tendrá mayor peso y en los planetas o satélites de menor masa tendrá menor peso.



4. **Inercia.** Los cuerpos tienden a mantener su estado de reposo o de movimiento, a no ser que fuerzas externas logren lo contrario. Recuerde que el movimiento y el reposo es relativo. Siempre debemos tener un punto de referencia en el espacio.

ESTADOS DE LA MATERIA

La materia tiene infinitos estados, uno para cada temperatura termodinámica.

Sin embargo, los estados de agregación o estados físicos, son solamente tres: sólido, líquido y gaseoso.

1. **Estado sólido.** En el estado sólido predomina la cohesión sobre la repulsión. Este se caracteriza por tener forma y volumen definidos (invariables), es el estado donde las moléculas, iones o átomos se encuentran muy próximos. Sus partículas están vibrando en un mismo punto.

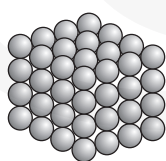
Existen sólidos amorfos (sin forma) y sólidos cristalinos (con orden geométrico). En los primeros no hay un orden para sus partículas (están desordenadas) y los segundos las partículas tienen un orden geométrico muy regular formando cristales. Los sólidos son incompresibles y no volátiles.

2. **Estado líquido.** En el estado líquido hay un equilibrio entre las fuerzas intermoleculares de cohesión y repulsión. Este se caracteriza por tener volumen definido y forma variable. Los líquidos adoptan la forma de la parte del recipiente que lo contiene.

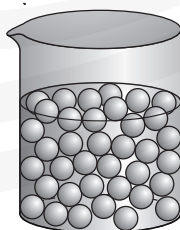
En los líquidos sus partículas están más separadas que en los sólidos pero más juntas que en los gases. Las partículas tienen mayor movilidad y mayor entropía (desorden) que en los sólidos. Los líquidos se caracterizan por ser mínimamente compresibles, por ser fluidos y volátiles.

3. **Estado gaseoso.** En el estado gaseoso hay más repulsión que cohesión intermolecular. Este se caracteriza por tener volumen y forma variables (no definidos). Los gases adoptan la forma del recipiente que lo contiene.

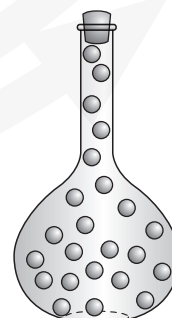
En los gases sus partículas están más separadas que en los líquidos y más aún que en los sólidos, inclusive. Los gases se caracterizan por tener alta entropía, por ser compresibles y expansibles. Los gases son fluidos.



Sólido



Líquido



Gaseoso

CAMBIOS DE FASE

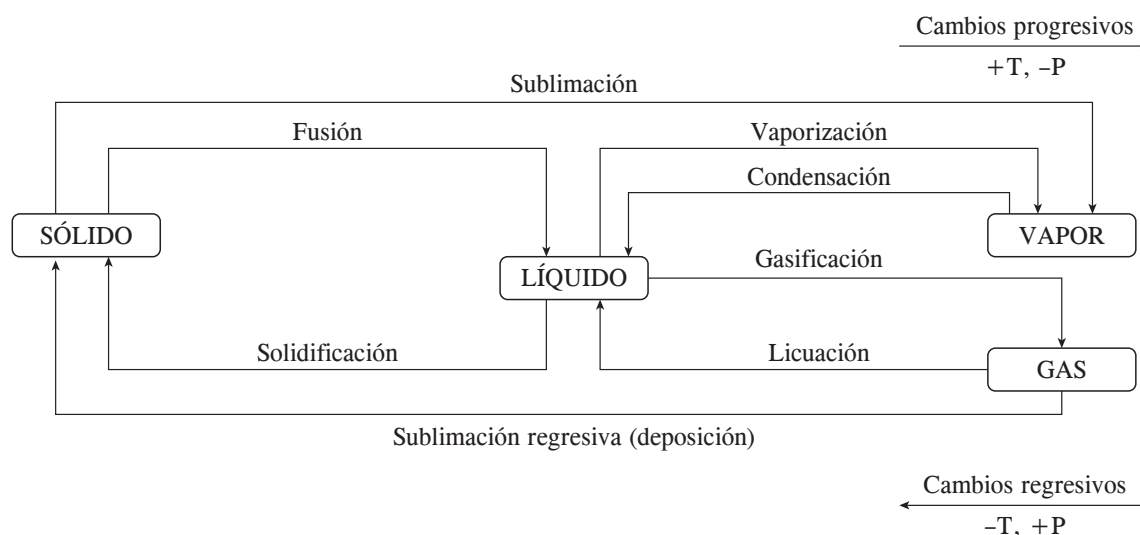
1. **Cambios de estado de la materia.** Los cambios de estado de la materia se pueden lograr al variar la temperatura y/o la presión.

Estos factores externos van a lograr variar la cinética de las partículas de un cuerpo, generando un cambio de fase (cambio de estado físico). Se trata de cambios físicos que sufre la materia.

Al aumentar la temperatura (o bajar la presión) se pueden lograr cambios como la fusión, la vaporización y la sublimación directa.

Por lo contrario al bajar la temperatura (o aumentar la presión) se pueden lograr cambios como la licuación, la solidificación y la sublimación regresiva (o deposición).

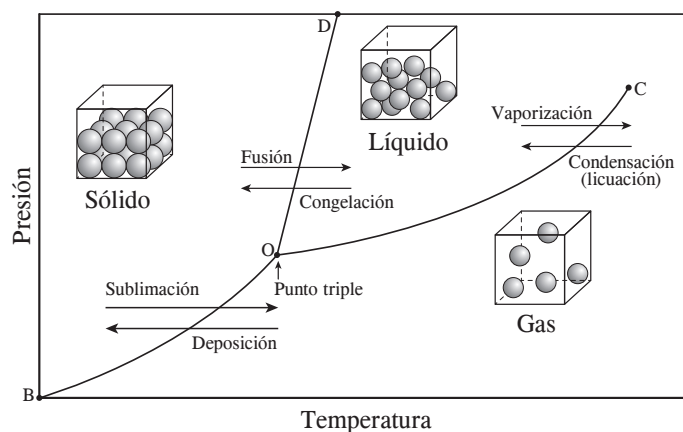
En el esquema se muestran como se dan los diferentes cambios de estado de la materia.



- 2. Evaporación.** La evaporación es un fenómeno de superficie y se produce a cualquier temperatura. En la superficie libre de un líquido las moléculas se mueven de tal manera, que se escapan hacia la fase gaseosa. La evaporación es el paso lento y gradual del estado líquido al estado gaseoso, tras haber adquirido la energía suficiente para vencer la tensión superficial. La evaporación varía en forma directa con la temperatura, pero en forma inversa con la presión.
- 3. Ebullición.** La ebullición es un fenómeno que se provoca en toda la masa del líquido y se produce a una temperatura, fija o constante. Por ejemplo en el caso del agua, este líquido se calienta de tal manera que cuando su temperatura llega a 100 °C, toda su masa se mueve bruscamente pasando al estado gaseoso. Así mismo cada líquido tiene una temperatura de ebullición para un valor de presión.
- 4. Líquidos volátiles.** La volatilidad en el contexto de la química, la física y la termodinámica es una medida de la tendencia de una sustancia al pasar a vapor. Se ha definido también como una medida de la facilidad con que una sustancia se evapora. A una temperatura dada, las sustancias con mayor presión de vapor se evaporan más fácilmente que las sustancias con una menor presión de vapor.
- 5. Diagrama de fases.** En termodinámica y ciencia de los materiales se denomina diagrama de fase o diagrama de estados de la materia a la representación entre las diferentes estados de la materia, en función de variables elegidas para facilitar el estudio del mismo. Cuando en una de estas representaciones todas las fases corresponden a estados de agregación diferentes se suele denominar diagrama de cambio de estado.

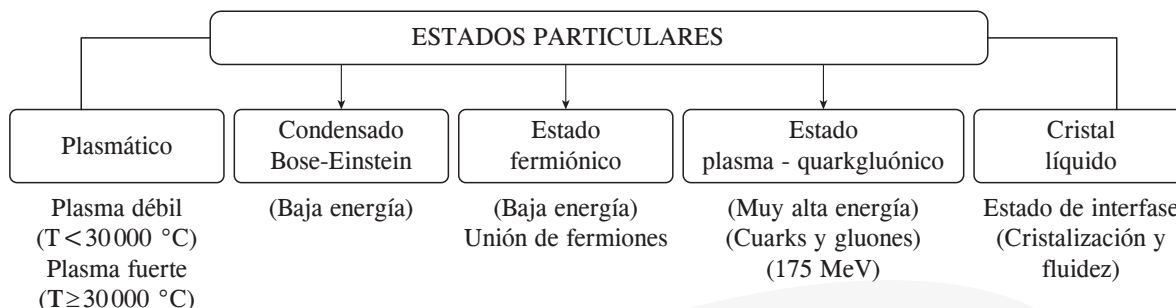
Los diagramas de equilibrio pueden tener diferentes concentraciones de materiales que forma una aleación a distintas temperaturas. Dichas temperaturas van desde la temperatura por encima de la cual un material está en fase líquida hasta la temperatura ambiente y en que generalmente los materiales están en estado sólido.

En el diagrama de fase que se muestra en la figura, las líneas $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ corresponden a valores de presión y temperatura en las que coexisten dos fases: En $\overline{OB}$, coexisten en equilibrio sólido y gas, se conoce como curva de vapor del sólido; en $\overline{OC}$ coexisten en equilibrio líquido y gas y en $\overline{OD}$ coexisten en equilibrio sólido y líquido.



OTROS ESTADOS DE LA MATERIA

1. **Estado plasmático.** Conocido también como el cuarto estado de la materia. Es un estado de alta energía, por esta razón se encuentra ionizada formada por iones positivos (cationes) y electrones libres. Como ejemplos de materia plasmática tenemos: Las estrellas, el Sol, las auroras boreales, el fuego, el arco eléctrico, los rayos, etc. El estado plasmático es el más abundante del universo; prácticamente el 99,99 % del universo es plasma.
2. **Quinto estado.** Es un estado de baja energía. El condensado Bose-Einstein, puede ser descrito como el estado donde los átomos tienen mayor carga posible de energía y el mayor orden, por el hecho de haber sido enfriado a temperaturas extremas, hasta el punto que los átomos se aglutinan en una masa densa (melaza óptica) que hace comportar a las partículas como un solo átomo único, que forma una identidad de grupo y actúan sincrónica y armónicamente con gran orden.



PROPIEDADES DE LA MATERIA (CUERPO MATERIAL)

Las propiedades de la materia (cuerpo material) son las diferentes características, peculiaridades o cualidades con las cuales se les puede identificar. Estas características son las diversas formas con las que los cuerpos materiales impresionan a nuestros sentidos o los instrumentos de medición.

Por ejemplo: por sus propiedades podemos diferenciar el agua de la gasolina, o el azúcar de la sal, etc.

Las propiedades de la materia se pueden clasificar de muchas maneras:

1. **Propiedades generales.** Llamadas también propiedades genéricas. Se presentan en todo cuerpo material sin importar su estado físico. Como ejemplos podemos mencionar: masa, volumen, impenetrabilidad, divisibilidad, porosidad, peso, atracción, indestructibilidad, extensión, etc.
2. **Propiedades particulares.** Llamadas propiedades específicas. Se presentan solo en algunos cuerpos. Como ejemplos podemos mencionar: brillo, color, ductibilidad (ductilidad), maleabilidad, olor sabor, tenacidad, combustibilidad, etc.
3. **Propiedades físicas.** Cuando se evalúan estas propiedades, la materia no sufre cambios en su estructura íntima o sea en su composición. *Ejemplos:* temperatura de ebullición, temperatura de fusión, isotropía, anisotropía, entropía, calor específico, coeficiente de solubilidad, color, compresibilidad, densidad, dilatibilidad, ductilidad, dureza, elasticidad, expansibilidad, fragilidad, índice de refracción, inercia, maleabilidad, módulo de Young, olor, resistividad, sabor, temperatura, tenacidad, viscosidad, volatilidad, etc.
4. **Propiedades químicas.** Cuando se evalúan estas propiedades, la materia sí sufre cambios en su estructura íntima o sea en su composición, para esto ocurre un fenómeno o transformación química. *Ejemplos:* reactividad, acidez, alcalinidad, basicidad, calor de reacción, comburencia, corrosividad, demanda de oxígeno, digestión, grado de disociación, inflamabilidad, inoxidabilidad, oxidabilidad, etc.
5. **Propiedades extensivas.** Son aquellas propiedades cuya medición o determinación depende de la cantidad de materia. *Ejemplos:* masa, peso, área, calor ganado, energía potencial, longitud, presión de un gas a temperatura constante, volumen, etc.
6. **Propiedades intensivas.** Son aquellas propiedades cuya medición o determinación no depende de la cantidad de materia. *Ejemplos:* acidez, adherencia, alcalinidad, aleabilidad, basicidad, calor específico, capilaridad, comburencia, combustibilidad, composición química, concentración, conductividad eléctrica, conductividad térmica, corrosividad, demanda de oxígeno, densidad, fragilidad, grado de disociación, índice de refracción, inflamabilidad, inoxidabilidad, magnetismo, mecanibilidad, oxidabilidad, plasticidad, poder calorífico, presión de vapor, punto de congelación, punto de ebullición, punto de fusión, reactividad, resiliencia, resistencia mecánica, solubilidad, temperatura, templabilidad.

CLASIFICACIÓN DE LA MATERIA

El universo está formado por la materia y el campo; la materia sustancial y la energía o materia no sustancial.

La materia es de dos clases: es sustancia química (especie química) o es mezcla; las sustancias son también de dos clases o son sustancias simples (elementos químicos) o son sustancias compuestas (compuestos químicos).

Las mezclas pueden ser de dos clases: son mezclas homogéneas o son mezclas heterogéneas.

1. **Sustancia química.** Es todo cuerpo material homogéneo de composición química definida (posee fórmula o representación simbólica) y por lo tanto, sus propiedades específicas o propias, como por ejemplo la densidad, solubilidad, reactividad, punto de ebullición, etc. son constantes a determinadas condiciones, la sustancia química tiene iguales propiedades en toda su extensión.
 - a. **Sustancia simple.** Es conocida también como elemento químico. Está constituida por átomos de un mismo elemento, por lo tanto no puede descomponerse en otras más sencillas. *Ejemplos:* hidrógeno, fósforo, oxígeno, uranio, potasio, cloro, etc. Estos elementos químicos tienen símbolos H, P, O, U, K, Cl, etc.
 - b. **Sustancia compuesta.** Es conocida también como compuesto químico. Está constituida por átomos de elementos diferentes (o moléculas heteroatómicas), por lo tanto pueden descomponerse en otras más sencillas. *Ejemplos:* El agua (H_2O) se puede descomponer en H_2 y O_2 , la sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$) se puede descomponer en C y H_2O , el cloruro de sodio (NaCl) se descompone en Na y Cl_2 , etc.

Mediante un proceso químico, los compuestos químicos se pueden transformar en sustancias simples.

2. **Mezcla.** Las mezclas resultan al reunir dos o más sustancias en cualquier proporción, no hay una relación constante entre las cantidades que se mezclan; de tal forma que las propiedades de las componentes se mantienen latentes, esto significa que no hay combinación química; por lo tanto las sustancias iniciales se pueden separar por medios mecánicos y/o térmicos.

“Toda mezcla es un fenómeno físico.”

- a. **Mezcla homogénea.** Llamada también solución. Es aquella mezcla que a simple vista, inclusive con la ayuda del microscopio (o el ultramicroscopio) no se pueden diferenciar sus componentes. Se caracteriza por una sola fase y en cualquier porción de la misma se tendrá la misma composición y propiedades. Cuando se logra una mezcla homogénea, la fase dispersa se llega a dividir hasta el nivel de iones (soluciones iónicas) o hasta el nivel de moléculas (soluciones moleculares). Los iones y las moléculas tienen diámetro menor de un nanómetro ($D < 1 \text{ nm}$). *Ejemplos:* agua con sal, agua con alcohol, acero, bronce, amalgama, aire, formol, ácido muriático, agua regia, agua potable, kerosene, petróleo, vidrio, vinagre, bebidas gasificadas, etc.
- b. **Mezcla heterogénea.** En este caso se tiene dos o más fases. A simple vista con ayuda de instrumentos como el microscopio, se diferencia la separación de sus componentes y cualquier porción que se tome tendrá composición y propiedades diferentes. Las partículas dispersas son mayores que en las soluciones. En los coloides el diámetro de las partículas dispersas es mayor que un nanómetro, pero menor que un micrómetro y en las suspensiones el diámetro de las partículas dispersas es mayor que un micrómetro. *Ejemplos:* agua y aceite, limaduras de hierro y azufre, mezcla de arena y cemento, benceno y agua, leche, clara de huevo, pintura, geles, queso, piedra pómez, espuma, sangre, polvo, neblina, agua turbia, jarabes, laxantes, etc.

FENÓMENOS

Todo lo que existe en el universo está en constante cambio o transformación. Los cuerpos están en constante cambio; la materia sufre cambios continuos en su estructura. Estos cambios reciben el nombre de fenómenos y se deben a las diversas formas de energía: luz, calor, electricidad, etc.

Un fenómeno es una manifestación que se produce en la materia. Puede ser físico, químico, nuclear o alotrópico, cada uno de estos tiene sus propias características.

1. **Fenómeno físico.** Los fenómenos físicos son transformaciones transitorias, donde las mismas sustancias se encuentren antes y después del fenómeno, es decir, no hay alteración en su estructura molecular. Es fácilmente reversible mediante otro fenómeno físico. *Ejemplos:* al doblar un clavo de acero, al romper un pedazo de papel, al mezclar sal con agua, al fundir un pedazo de hielo, al evaporar un poco de agua, al calentar un trozo de cobre, al estirar un jebe, etc.; en todos estos casos la materia tiene la misma composición al final del fenómeno.

En los fenómenos físicos no se forman nuevas sustancias (no hay productos); la materia tiene finalmente la misma composición pero con diferente apariencia física. *Ejemplo:* $C_{10}H_{8(s)} \rightarrow C_{10}H_{8(g)}$

2. **Fenómeno químico.** Los fenómenos químicos son combinaciones químicas. Son transformaciones permanentes, donde una o varias sustancias desaparecen, y donde una o varias sustancias nuevas se forman, es decir, hay alteraciones en su estructura íntima o molecular. No es reversible mediante procesos físicos.

En los fenómenos químicos se forman nuevas sustancias o productos, con propiedades diferentes a las de las sustancias iniciales. *Ejemplos:* Al calentar un trozo de hierro al aire libre se forma óxido férrico (Fe_2O_3); cuando se quema un papel (combustión) se produce CO_2 , CO , C y H_2O ; la digestión de los alimentos; la fermentación de la chicha; etc.

Otro ejemplo: $2\text{KClO}_{3(s)} \xrightarrow{\Delta} 2\text{KCl}_{(s)} + 3\text{O}_{2(g)}$

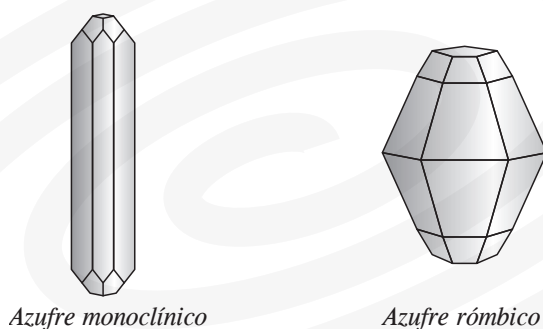
3. **Fenómeno alotrópico.** Un mismo elemento químico se puede presentar de formas diferentes en un mismo estado físico. Estas pueden ser formas moleculares o cristalinas, debido a ello sus propiedades son diferentes. Por ejemplo el oxígeno se presenta de dos formas diferentes: puede ser diatómico O_2 o triatómico O_3 (gas ozono o gas azul). El O_2 cumple función vital, es inodoro, incoloro e insípido, poco reactivo; en cambio el O_3 es un gas azulado, de olor picante, tóxico (no cumple función vital), irrita las mucosas, muy reactivo (oxidante energético), más denso, se usa como agente de blanqueo, desinfectante (en potabilización del agua), desodorizante, etc.

También podemos mencionar al carbono (C) que tiene dos alotropos naturales el grafito y el diamante.

Ejemplo: $3\text{O}_{2(g)} \rightarrow 2\text{O}_{3(g)}$

Otro ejemplo es el fósforo, el cual tienen dos formas alotrópicas: fósforo blanco P_4 y fósforo rojo P_x (siendo x un número muy grande).

También debemos tener en cuenta las dos formas alotrópicas del azufre: el azufre rómbico y el azufre monoclinico.



MÉTODOS DE SEPARACIÓN DE LAS MEZCLAS

1. **Para separar mezcla de sólidos**
 - a. **Tamizado:** Separación arena y cemento, separación de harina (polvo fino) y afrecho (polvo grueso).
 - b. **Levigación:** Separación de minerales de plata y su ganga, separación de oro de su ganga.
2. **Para separar mezcla de sólidos y líquidos**
 - a. **Decantación:** Separación de arena y agua.
 - b. **Sifón:** Extracción de agua madre dejando el azúcar cristalizado.
 - c. **Filtración:** Separación de las semillas y otras partículas del jugo de limón.
 - d. **Centrifugación:** Separación de partículas sólidas del jugo de caña de azúcar.
 - e. **Cristalización:** Por vía húmeda: cristalización del azúcar; por vía seca: cristalización del yodo.
 - f. **Destilación simple:** Separar el NaCl de agua por calentamiento.
3. **Para separar mezcla de líquidos**
 - a. **Destilación fraccionada:** Separación de líquidos miscibles (agua y alcohol).
 - b. **Decantación o sifón:** Separación de líquido no miscibles (inmiscibles). *Ejemplo:* agua y aceite.

4. Otros métodos

- Cromatografía
- Diálisis
- Magnetización

ENERGÍA

La energía es una forma o cualidad intangible de la materia que causa un cambio o interacción de cuerpos materiales; en otros términos, es la capacidad para realizar trabajo. Por lo tanto, todo cambio (o fenómeno) físico, químico o nuclear que ocurre en cuerpos materiales es causado por la energía. La energía puede ser mecánica (cinética y potencial), calorífica, luminosa, eléctrica, nuclear, atómica, electromagnética, geotérmica, eólica, mareomotriz, solar, etc.

1. Relación masa-energía

La relación entre la masa y la energía fue planteada por Albert Einstein (1905) en su obra *Teoría especial de la relatividad*. Plantea que la masa y energía son dos formas de la materia que están relacionadas, mediante la siguiente ecuación

$$E = m \cdot c^2$$

Donde

E: energía almacenada en un cuerpo material de masa m .

c = velocidad de la luz

$c = 300\,000\text{ km/s}$

$c = 3 \times 10^8\text{ m/s}$

$c = 3 \times 10^{10}\text{ cm/s}$

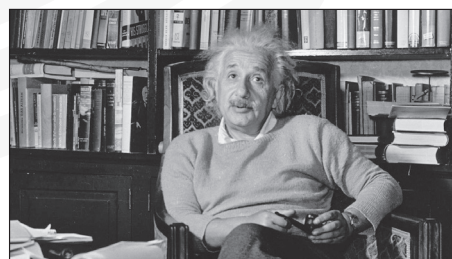
* Unidades en el SI:

E	m	c
Joule (J)	kg	$3 \times 10^8\text{ m/s}$

? Sabías que...

Albert Einstein

Sus trabajos revolucionaron la ciencia, cambiaron radicalmente las concepciones acerca de la naturaleza y el origen del universo. Su teoría de la relatividad, es hasta ahora un trabajo que explica lo que hasta era inexplicable para la física clásica.



Ejemplo:

Determine la energía equivalente para una partícula de $4 \times 10^{-27}\text{ kg}$.

Datos:

$E = ?$

$m = 4 \times 10^{-27}\text{ kg}$

$c = 3 \times 10^8\text{ m/s}$

Resolución:

De acuerdo a la relación entre la masa y la energía de Albert Einstein, se tiene

$$E = m \cdot c^2$$

$$E = (4 \times 10^{-27}\text{ kg})(3 \times 10^8\text{ m/s})^2$$

$$E = (4 \times 10^{-27})(9 \times 10^{16})\text{ J}$$

$$E = 3,6 \times 10^{-10}\text{ J}$$

2. Teoría de la relatividad

Según la teoría de la relatividad, la masa inercial de un cuerpo aumenta con el aumento de velocidad, según la siguiente ecuación

$$m_f = \frac{m_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}}$$

Donde

m_i : masa inicial (en el reposo relativo)

m_f : masa final, cuando su velocidad es v_f

Esta relación es significativa solo para partículas que viajan a grandes velocidades, como por ejemplo las partículas subatómicas aceleradas (electrones, protones, neutrones, etc.) en ciclotrones y betatrones, que son instrumentos creados por el hombre para incrementar la velocidad de partículas. Para cuerpos ordinarios, cuyas velocidades son muy pequeñas respecto a la velocidad de la luz, el incremento de la masa inercial es extremadamente pequeña que ningún instrumento de medida es capaz de detectar, por lo tanto no tiene mayor significado.

Cuando se dice que la masa inercial de un cuerpo aumenta, no significa que va aumentar el número de átomos o moléculas, pues estos permanecen inalterables, lo que se quiere decir es que la fuerza para vencer su inercia aumenta, puesto que va a incrementarse su velocidad.

Ejemplo:

Cierta partícula tiene una masa de 2×10^{-23} gramos en el reposo relativo. Determine su masa cuando alcanza una velocidad de 75 000 km/s.

Datos:

$$m_i = 2 \times 10^{-23} \text{ g}$$

$$m_f = ?$$

$$v_f = 75\,000 \text{ km/s}$$

$$c = 300\,000 \text{ km/s}$$

Resolución:

$$m_f = \frac{m_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}} \Rightarrow m_f = \frac{2 \times 10^{-23} \text{ g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{75\,000}{300\,000}\right)^2}} \Rightarrow m_f = 2,066 \times 10^{-23} \text{ g}$$

3. El calor como tipo de energía

El calor es energía. El calor es la transferencia de energía entre diferentes cuerpos o diferentes zonas de un mismo cuerpo que se encuentran a distintas temperaturas. Este flujo siempre ocurre desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el cuerpo de menor temperatura, ocurriendo la transferencia de calor hasta que ambos cuerpos se encuentren en equilibrio térmico. *Ejemplo:* Una bebida fría dejada en una habitación se entibia.

La energía puede ser transferida por diferentes mecanismos, entre los que cabe reseñar la radiación, la conducción y la convección, aunque en la mayoría de los procesos reales todos se encuentran presentes en mayor o menor grado.

El calor se mide con el calorímetro.

a. Calor específico (Ce)

El calor específico es la energía necesaria para elevar 1 °C la temperatura de un gramo de materia.

$$Ce = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

Donde

Q: cantidad de calor (cal, kcal, J)

m: masa de la sustancia (g, kg)

ΔT : variación de la temperatura (°C)

b. Cantidad de calor (Q)

Referido a la cantidad de calor que se debe suministrar o quitar a un cuerpo para calentarlo o enfriarlo en un rango de temperatura. De la ecuación de calor específico se tiene

$$Q = m \cdot Ce \cdot \Delta T$$

c. Capacidad calorífica (C)

La capacidad calorífica es el cociente entre la cantidad de energía calorífica transferida a un cuerpo o sistema en un proceso cualquiera y el cambio de temperatura que experimenta.

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = Ce \cdot m$$

Se expresa en cal/°C, kcal/°C, J/°C.

Equivalencias

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergios}$$

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0,24 \text{ cal}$$

$$1 \text{ kcal} = 1000 \text{ cal}$$

d. Temperatura de equilibrio de una mezcla

Si se mezclan dos sustancias (sustancia 1 y sustancia 2) a diferentes temperaturas, la temperatura de equilibrio es:

$$T_{eq} = \frac{m_1 \cdot Ce_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot Ce_2 \cdot T_2}{m_1 \cdot Ce_1 + m_2 \cdot Ce_2}$$

Ejemplo:

Una barra de 100 g de plomo a 100 °C se introduce en 100 g de agua que inicialmente está a 10 °C. Determine la temperatura de equilibrio en °C. ($Ce_{\text{plomo}} = 0,03 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$; $Ce_{\text{agua}} = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$)

Datos

$$m_{\text{plomo}} = 100 \text{ g}$$

$$T_{\text{plomo}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$Ce_{\text{plomo}} = 0,03 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

$$m_{\text{agua}} = 100 \text{ g}$$

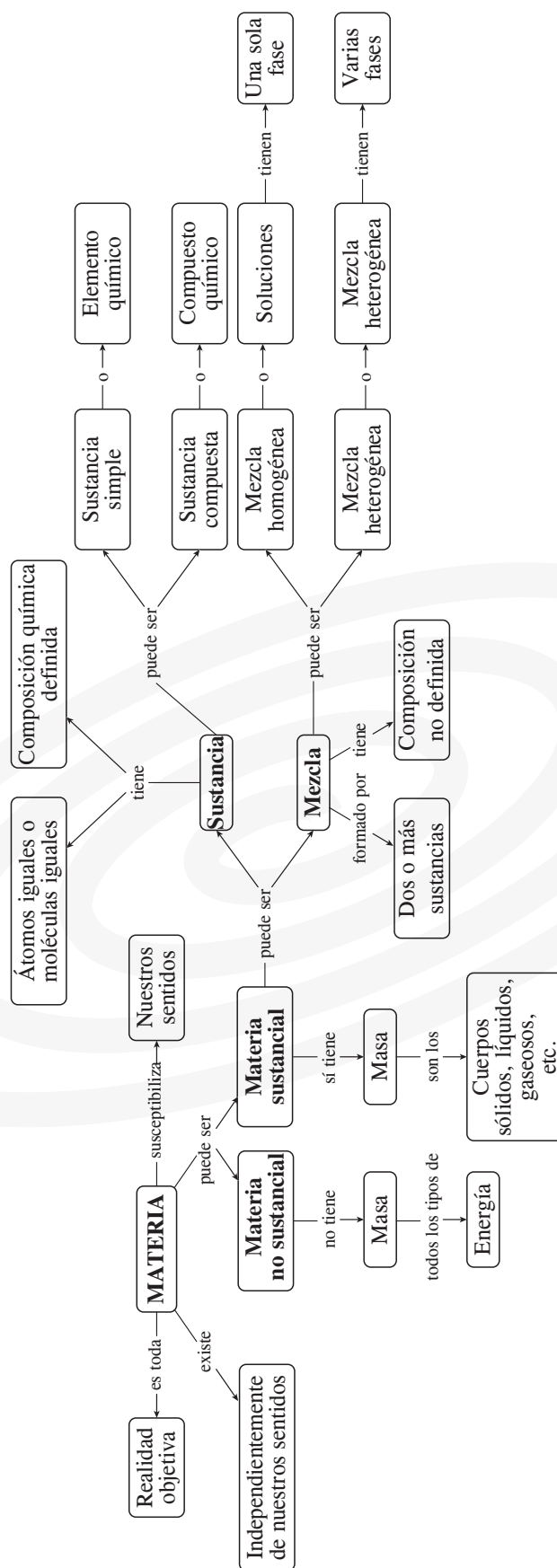
$$T_{\text{agua}} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

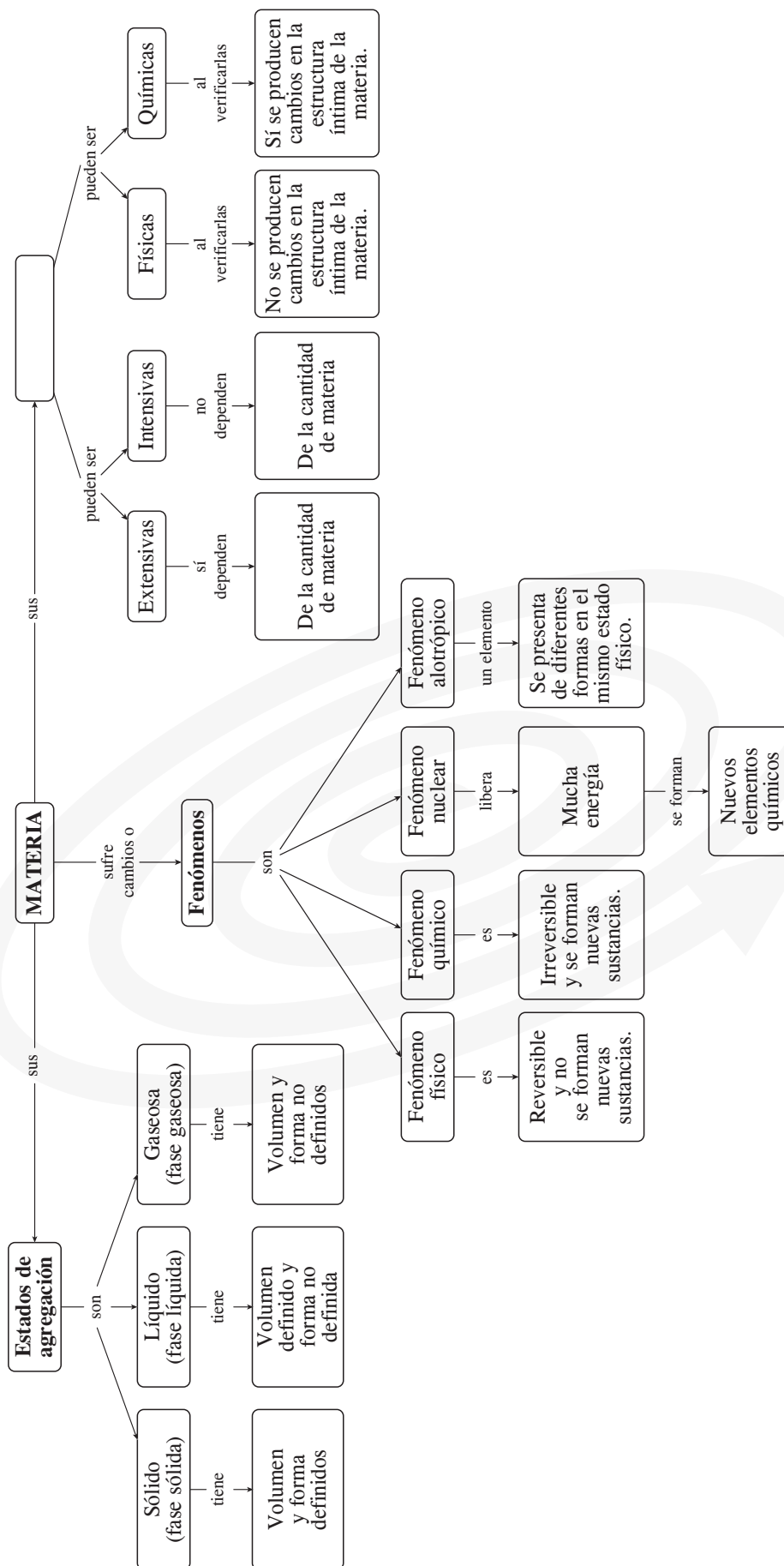
$$Ce_{\text{agua}} = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

Resolución

$$T_{eq} = \frac{m_{\text{plomo}} \cdot Ce_{\text{plomo}} \cdot T_{\text{plomo}} + m_{\text{agua}} \cdot Ce_{\text{agua}} \cdot T_{\text{agua}}}{m_{\text{plomo}} \cdot Ce_{\text{plomo}} + m_{\text{agua}} \cdot Ce_{\text{agua}}} \Rightarrow T_{eq} = \frac{100 \cdot 0,03 \cdot 100 + 100 \cdot 1 \cdot 10}{100 \cdot 0,03 + 100 \cdot 1}$$

$$T_{eq} = 12,6 \text{ }^\circ\text{C}$$





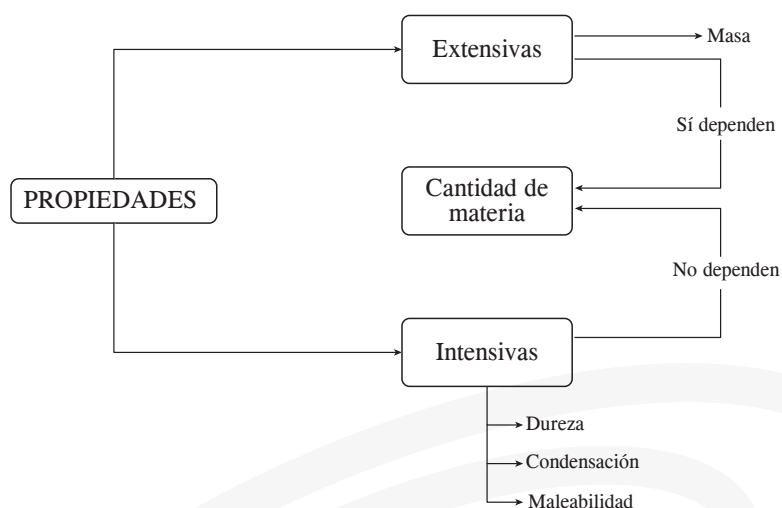


Problemas resueltos

1. ¿Cuáles de las siguientes propiedades son extensivas? (UNI 2018-1)

- La dureza de un sólido iónico.
- La temperatura de condensación del vapor de agua.
- La maleabilidad de los metales.
- La masa de una muestra líquida.

Resolución



Rpta.: Solo IV

2. Un analista químico recibe una muestra metálica para su caracterización e identificación, y empieza describiendo las siguientes propiedades: Muestra de volumen pequeño, elevada densidad, maleable, alto brillo, muy poco reactivo con los ácidos, no se oxida al ambiente. Determine el número de propiedades extensivas mencionadas. (UNI 2017-2)

Resolución

Las propiedades extensivas sí dependen de la cantidad de materia ejemplo: volumen.

Las propiedades como la densidad, la maleabilidad, el brillo, no dependen de la cantidad de materia por lo tanto son intensivas.

Rpta.: 1

3. ¿Cuál de los siguientes procesos es un cambio físico? (UNI 2014-1)

- Una cuchara de plata que se oscurece por acción del aire.
- El sudor que se evapora, al descansar después de jugar tenis.
- La obtención de hidrógeno gaseoso a partir del agua.
- La generación de energía a partir de la combustión del gas natural.
- La digestión de un alimento.

Resolución

A) Cambio químico: Si la cuchara se oscurece por acción del aire significa que se forma un óxido (una nueva sustancia): Ag_2O .

B) Cambio físico: Después de jugar tenis, al descansar el sudor se evapora (no se forman nuevas sustancias).

C) Cambio químico: $2\text{H}_2\text{O}_{(l)} \rightarrow 2\text{H}_{2(g)} + \text{O}_{2(g)}$

D) Cambio químico:

Gas natural $\text{C}_x\text{H}_y + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{Energía}$

E) Cambio químico: La digestión de los alimentos implica una serie de reacciones químicas donde se forman nuevas sustancias.

Rpta.: El sudor que se evapora al descansar, luego de jugar tenis.

4. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta. (UNI 2014-1)

- I. Al calentar un huevo en baño maría, la clara pasa de ser un gel incoloro a un sólido blanco. Se trata de un cambio químico. ()
- II. Los animales procesan los carbohidratos y oxígeno generando dióxido de carbono y agua, mientras que las plantas procesan el dióxido de carbono y el agua para producir carbohidratos. Se puede concluir que el ciclo natural del carbono es un proceso físico. ()
- III. Al agregarle limón a una infusión de té, la infusión cambia de color, por lo que se observa un cambio químico. ()

- A) VVF B) VFV C) FVF
D) FFV E) VFF

Resolución

- I. Verdadero: La desnaturalización de las proteínas (clara del huevo) ocurre cuando se pierde la conformación espacial original. Esto se logra con diferentes factores entre ellos la temperatura (cambio químico).
- II. Falso: El ciclo del carbono incluye transformaciones donde se forman nuevas sustancias (CO_2 , H_2O , $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{16}$, etc.) (cambio químico).
- III. Verdadero: El cambio de color al agregar limón (ácido) al té (base) indica el desarrollo de una reacción química.

Rpta.: VFV

5. En una reacción nuclear se desprende 9×10^8 ergios. ¿Qué cantidad de materia, en gramos, habría sido transformada en energía? (UNI 1999-2)

Dato: Velocidad de la luz = 3×10^{10} cm/s

Resolución

Usando la relación de equivalencia de Albert Einstein:

$$E = m \cdot c^2$$

$$9 \times 10^8 \text{ ergios} = m(3 \times 10^{10} \text{ cm/s})^2$$

$$m = \frac{9 \times 10^8 \text{ ergios}}{9 \times 10^{20} \text{ cm}^2/\text{s}^2} \Rightarrow m = 1,0 \times 10^{-12} \text{ g}$$

Rpta.: $1,0 \times 10^{-12}$



Helicopráctica

Nivel I

1. Entre los materiales que se mencionan, ¿cuál es la porción de materia más pequeña que se puede determinar por algún método físico o químico?

- A) Una botella con agua destilada
- B) Átomo de hierro metálico
- C) Barra de oro
- D) Molécula de colesterol
- E) Gota de etanol

Resolución

3. Señale las características asociadas a las sustancias puras.

- I. Composición fija y constante
- II. Sistema heterogéneo
- III. Mezcla homogénea
- IV. Punto de fusión constante
- V. Sistema homogéneo

Resolución

2. Identifique como elemento (E), compuesto (C), mezcla homogénea (H), mezcla heterogénea (Ht) las especies:

- Fósforo rojo ()
- Arena en agua ()
- Dióxido de carbono ()
- Agua salada ()
- Diamante ()

Resolución

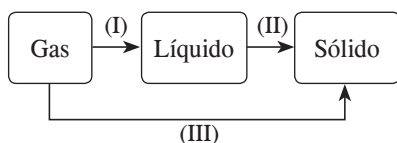
4. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- a. En estado sólido, las partículas componentes vibran u oscilan en agrupamientos. ()
- b. En estado líquido, las moléculas tienen fuerza de cohesión equilibradas con las fuerzas térmicas o repulsivas. ()
- c. El estado gaseoso no es fluido ni compresible. ()

Resolución

Nivel II

5. Marque la alternativa correcta respecto a los cambios de estado de agregación para el enfriamiento de una sustancia gaseosa en el orden: (I), (II), (III)



- A) Fusión, evaporación, sublimación
 B) Fusión, sublimación, evaporación
 C) Licuación, solidificación, deposición
 D) Licuación, fusión, deposición
 E) Evaporación, solidificación, sublimación

Resolución

7. Las sustancias presentan propiedades y están sometidas a cambios físicos y químicos. Al respecto, marque la alternativa correcta.

- A) La temperatura de un líquido es una propiedad extensiva.
 B) El volumen es una propiedad intensiva.
 C) Al disolver sal de mesa en agua ocurre un fenómeno químico.
 D) La fotosíntesis de las plantas es un fenómeno químico, así como la cocción de un huevo.
 E) La fragmentación de una roca por efecto de una molienda es un proceso o fenómeno químico.

Resolución

6. Escriba físico (F) o químico (Q) según corresponda, al fenómeno indicado.

- a. Evaporación espontánea de un lago. ()
 b. Al aumentar la temperatura del agua, las moléculas se dispersan y se convierten en vapor. ()
 c. Al aumentar la temperatura del amoníaco, se obtienen N_2 y H_2 . ()
 d. Combustión del gas natural vehicular. ()
 e. Fermentación del jugo de uvas. ()

Resolución

8. Indique las propiedades físicas que son intensivas.

- I. Punto de fusión
 II. Reactividad
 III. Densidad
 IV. Oxidabilidad
 V. Combustibilidad
 VI. Temperatura
 VII. Acidez
 VIII. Poder oxidante

Resolución

Nivel III

9. Marque la alternativa que contiene una mezcla, una sustancia compuesta y un elemento; en ese orden.

A) Diamante, glucosa, aluminio
 B) Agua potable, grafito, cloro
 C) Agua destilada, dióxido de carbono, cobre
 D) Oro de 18 kilates, cloruro de sodio, ozono
 E) Aire, ácido clorhídrico, agua destilada

Resolución

11. Clasifique las propiedades físicas (F), químicas (Q), intensivas (I), extensivas (E) según corresponda.

➤ Color () ()
 ➤ Poder oxidante () ()
 ➤ Densidad () ()
 ➤ Combustibilidad () ()
 ➤ Volumen () ()

Resolución

10. Respecto a los estados de agregación, marque la alternativa falsa.

A) Las partículas tienen el mayor orden en el estado sólido.
 B) Al aumentar la temperatura de hielo (s) se funde (fusión) y se convierte en agua (l).
 C) La evaporación se produce cuando un líquido aumenta su temperatura y las moléculas se separan de la superficie del líquido.
 D) La licuación se produce cuando un sólido se calienta y se convierte en líquido.
 E) En el estado gaseoso, el volumen y la forma se adaptan al recipiente.

Resolución

12. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. El valor de una propiedad intensiva de una mezcla puede obtenerse sumando el valor de esta propiedad para cada componente de la mezcla. ()
 b. El valor de las propiedades extensivas son aditivas. ()
 c. La combustibilidad es una propiedad química intensiva. ()

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - a. La materia sufre transformaciones físicas y químicas. ()
 - b. Las moléculas se dividen en átomos. ()
 - c. Los átomos ya no sufren división alguna en la materia. ()

Resolución

3. Indique la cantidad de sustancias (S) y de mezclas (M).
 - I. Mercurio ()
 - II. Concreto ()
 - III. Salmuera ()
 - IV. Ácido muriático ()
 - V. Gasolina ()
 - VI. Hierro ()
 - VII. Anhídrido carbónico ()

Resolución

2. Sobre las sustancias y mezclas de las sustancias, marque la alternativa falsa.
 - A) El aire es una mezcla gaseosa homogénea.
 - B) El diamante (tetraedro de carbonos) y el grafito (hexágono de carbonos) son formas alotrópicas del carbono.
 - C) La salmuera que es un sistema homogéneo se obtiene al disolver sal común en agua.
 - D) El dióxido de carbono no es una mezcla sino un compuesto.
 - E) Para separar el azúcar disuelto en agua basta con filtrar el agua azucarada.

Resolución

Nivel II

4. Marque la alternativa que describa mejor el proceso de sublimación de una sustancia pura.
 - A) Al aumentar la temperatura, las moléculas del sólido se separan cada vez más hasta alcanzar el estado líquido.
 - B) Al aumentar la temperatura, las moléculas del líquido se dispersan pasando a ser gas.
 - C) Al aumentar la temperatura del sólido aumenta su presión de vapor, las moléculas se separan cada vez más hasta pasar completamente a gas.
 - D) Al disminuir la temperatura del gas, este logra aumentar las fuerzas intermoleculares y convertirse en líquido.
 - E) El hielo aumenta su temperatura y se convierte en agua líquida.

Resolución

Nivel III

5. Marque la alternativa que presenta en forma ordenada propiedad extensiva, propiedad intensiva, propiedad química.

A) Paramagnetismo, masa, inflamabilidad
 B) Densidad, fluidez, presión de vapor
 C) Presión, masa, maleabilidad
 D) Volumen, temperatura, oxidabilidad
 E) Color, volumen, combustibilidad

Resolución

7. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. La sal disuelta en agua se separa por filtración. ()
 b. La reactividad de un alqueno es una propiedad química. ()
 c. Cuando el agua se solidifica estamos frente a un fenómeno físico. ()
 d. El peso es una propiedad intensiva. ()

Resolución

6. Escriba si el cambio ocurrido es químico (Q) o físico (F).

➤ Evaporación del agua de mar ()
 ➤ Combustión de la gasolina ()
 ➤ Fermentación del jugo de uva ()
 ➤ Sublimación del hielo seco ()
 ➤ Laminado de un trozo de cobre ()

Resolución

8. En la UNI se realizan diversos experimentos a una muestra de paladio (Pd), determinándose lo siguiente:

I. Volumen de muestra: 10 cm^3
 II. Color: blanco plateado
 III. Maleabilidad: media
 IV. Brillo: regular
 V. Reactividad en ácidos: muy baja
 VI. Oxidabilidad: baja
 VII. Temperatura de fusión: 1870°C

¿Cuántas propiedades intensivas se detectaron en la muestra de Pd?

A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

Resolución



Test 1

Nivel I

1. De acuerdo a la mezcla, ¿qué proposiciones son correctas?
- Si separamos los componentes de una mezcla homogénea, obtenemos sustancias simples y/o compuestos.
 - Si separamos los componentes de una mezcla homogénea, obtenemos mezclas.
 - Una muestra de pólvora está hecha de azufre, carbono y nitrato de potasio. Para separar sus componentes utilizamos la disolución con solventes, la filtración y la evaporación.
- A) Solo I B) Solo II
C) Solo III D) I y III
E) I, II y III

2. Un analista químico recibe una muestra metálica para su identificación y lo describe con las siguientes propiedades subrayadas: muestra de volumen pequeño, elevada densidad, maleable, alto brillo, poco reactivo con los ácidos, no se oxida al ambiente. Indique el número de propiedades extensivas que describe el analista.
- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

Nivel II

3. Identifique cada uno de los siguientes materiales como elementos (E), compuestos (C) o mezclas (M).
- Silicio ()
 - Ozono ()
 - Agua de mar ()
 - Acero ()
 - Aire ()
- A) ECEMM B) MCECM
C) MEMME D) EEMMM
E) CEMME

4. Por la naturaleza discontinua de la materia, esta puede sufrir divisiones sucesivas mediante procesos físicos (F), químicos (Q) y nucleares (N). Para cada proposición que muestra un proceso de división señale qué tipo es:
- Descomposición del compuesto agua (H_2O) en sus elementos hidrógeno (H_2) y oxígeno (O_2) por electrólisis. ()
 - Trituración mediante chancado del mineral hematita que contiene óxido férrico (Fe_2O_3). ()
 - Fisión nuclear en explosión de una bomba atómica de uranio. ()
- A) FQN B) QFN C) FNQ
D) NQF E) QNF

Nivel III

5. De las siguientes alternativas, ¿en qué caso se tiene una sustancia en estado sólido a condiciones ambientales?
- Azufre
 - Fósforo
 - Carbono
 - Bromo
 - Flúor
- A) Solo I B) I, II y IV
C) I, II y III D) II, III y IV
E) I, II y IV



Test 2

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, respecto a la clasificación de la materia.
- Mezcla homogénea: presenta más de una fase. ()
 - Sustancia compuesta: formada por varios elementos diferentes en proporciones definidas. ()
 - Mezcla homogénea: es el agua dura no apta para el consumo humano. ()
- A) FFF B) FFV C) F V V
D) VVV E) VFV

2. De las características del bromo, ¿cuál se relaciona con una propiedad química?
- A) Es un líquido marrón rojizo.
B) Su punto de ebullición es 58,9 °C y su punto de fusión es 7,2 °C.
C) Su densidad a 20 °C es 3,12 g/ml.
D) Forma fácilmente vapores rojizos.
E) Es un líquido corrosivo para metales.

Nivel II

3. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.
- La materia es de naturaleza discontinua o discreta. ()
 - La masa de un cuerpo se mide en una balanza. ()
 - El cambio de estado de líquido a gas se llama vaporización. ()
- A) VVF B) VVV C) V F F
D) VFV E) FVV

4. Establezca un relación correcta entre los materiales de la columna izquierda y la clasificación mostrada en la columna derecha.

I. Etano	a. Mezcla homogénea
II. Ozono	b. Mezcla heterogénea
III. Madera	c. Sustancia compuesta
IV. Bronce	d. Sustancia simple
A) Ia, IId, IIb, IVc	
B) Ib, IIc, IIIa, IVd	
C) Ic, IId, IIb, IVa	
D) Id, IIc, IIIa, IVb	
E) Id, IIc, IIb, IVa	

Nivel III

5. Identifique en la siguiente lista lo que no se considera materia sustancial.
- I. Una millonésima de gramo de aire
II. Un trozo de corcho
III. Dos joule de calor
IV. Un litro de aire a 25 °C y 1 atm
V. La luz que emite una bombilla eléctrica
- A) I y II B) I y III C) III y IV
D) I, II y IV E) III y V



Helicodesafío

1. ¿Qué tipo(s) de materia posee cada una de las siguientes propiedades o características?

- Variedad de materia de composición variable constituida en dos fases diferentes.
- Variedad de materia de composición definida que se puede descomponer en sustancias más simples, por medios químicos.
- Variedad de materia formado por la mezcla de dos o más sustancias, constituidos en una sola fase.
- Variedad de materia de composición variable, cuyas componentes se pueden separar por medios físicos como la decantación, filtración, centrifugación.
- El grafito y diamante, así como el oxígeno gaseoso (O_2) y el ozono (O_3), son ejemplo de algunas sustancias que pueden existir en la naturaleza con estructuras diferentes y dentro del mismo estado de agregación.

- Mezcla heterogénea
- Alotropía
- Solución
- Compuesto
- Mezcla homogénea

- aI, bIV, cIII, dV, eII
- aI, bIV, cV, dIII, eII
- aI, bIV, cIII, dII, eII
- aI, bII, cIV, dV, eII
- aI, bIV, cIII, dI, eII

2. De acuerdo a los estados de agregación, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- Los estados de agregación más importantes y difundidos en la naturaleza son el estado líquido y gaseoso. ()
- Existen otros dos estados de materia, a alta temperatura y baja temperatura, respectivamente estado plasmático y estado condensado Bose-Einstein. ()
- Los estados físicos de la materia se encuentran agregados por interacciones interatómicas, intermoleculares, interiónicas. ()

- VVV B) VVF C) V F V
- FVV E) FVF

3. Al comparar el agua y etanol, observamos las siguientes propiedades.

	Agua	Metanol
I	No es <u>combustible</u> .	Es <u>combustible</u> .
II	Es <u>menos volátil</u> .	Es <u>más volátil</u> .
III	<u>Descompone</u> en los gases hidrógeno y oxígeno por electrólisis.	<u>Descompone</u> en celdas de combustible.
IV	<u>Reacciona</u> violentamente con el sodio metálico.	<u>Reacciona</u> con ácidos orgánicos para producir ésteres.

Identifica si los conceptos subrayados en (I), (II), (III), y (IV), son propiedades físicas (F) o propiedades químicas (Q), respectivamente.

- QQQF B) QFFQ C) QFQQ
- FFQF E) FFFQ

4. Clasifique a cada uno de los siguientes proposiciones como sustancia o mezcla.

- Agua dura
- Mercurio
- Concreto
- Bebida gaseosa
- Alcohol etílico
- Ácido muriático
- Grafito
- Gasolina
- Gas helio
- Fierro de construcción

¿Cuántas corresponden a sustancia?

- 1 B) 2 C) 3
- 4 E) 5

5. El yodo es un halógeno que a temperatura ambiente se encuentra en estado sólido, presentando una coloración negro violáceo, cuya temperatura de fusión normal es 114°C ; así mismo esta sustancia es menos reactiva que el flúor, pero su radio atómico es mayor. Por otro lado podemos indicar también que el yodo es más soluble en agua que el flúor. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda las propiedades subrayadas.

- Se hace referencia a 6 propiedades intensivas. ()
- Solo una de las propiedades es química. ()
- Se indica dos propiedades físicas y extensivas. ()

- VFF B) VVF C) VFV
- FVF E) VVV

RADIACIONES ELECTROMAGNÉTICAS



Objetivos

- Define las radiaciones electromagnéticas, sus elementos y la teoría cuántica.
- Explica el espectro electromagnético y el efecto fotoeléctrico.



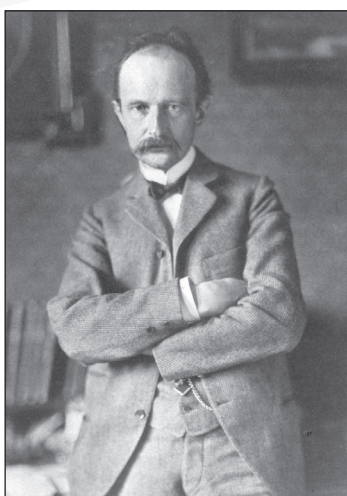
Curiosidades

Lectura

Las radiaciones **electromagnéticas** se propagan como ondas resultantes de la perturbación de un campo eléctrico y un campo magnético. Estas ondas corresponden a un **fotón** o **cuanto** en movimiento sinusoidal y en el vacío se mueven a la velocidad **constante** de la luz (300 000 km/s). Según Max **Planck**, la energía radiante se propaga ondulatoriamente en forma de pequeños **paquetes** (cantidades discretas) de energía conocidos como cuantos, los cuales tienen cierta **frecuencia**. Esta frecuencia es la recíproca del **periodo**, además es inversamente proporcional a su **longitud** de onda. El **espectro** electromagnético está formado por radiaciones como los rayos **cósmicos**, los rayos **gamma**, los **rayos X**, los rayos **ultra-violeta**, la **luz visible**, los rayos **infrarrojos**, las **microondas**, las **ondas de radar**, las ondas de **radio**, la frecuencia **modulada**, las ondas de televisión y las micropulsaciones. El **efecto fotoeléctrico** fue demostrado magistralmente por Albert Einstein, el cual explica como una radiación electromagnética se puede transformar en fotoelectrones (electricidad).

Actividad

De acuerdo a la lectura, busque las palabras en negrita en el pupiletras de la siguiente página.



Max Planck



Pupiletras

V K Z P L A N C K I P Ñ H I D R A D A R
 L V N D K T Y A P N L A G E F E C T O P
 L C D V T V Z M W S L V L I J B D F P L
 Ñ Z U O V D U O F E P R B J P F D E A E
 X H C R N J F D Ñ S O Y A R V D L S Q L
 C C U T N I V U P H B O J P G E V P U B
 Y F A C O N H L B R O I T S C T C S E I
 R O N E T P Z A A X L R O T F N L B T S
 S T T P O P O D G I D J R L R A J E E I
 O O O S F F I A T T O O M E E T S I S V
 C E P E Y O M T B R M O L Ñ C S E Z U L
 I L U Y W M K F R A N L Z S U N Q R S B
 M E J T A V D A G D U H G N E O Z L X D
 S C A R A H R N A K C O P N N C X O A J
 O T C E L F E S B V S H M W C B U N E Q
 C R V C N T Z B K W E Q A Ñ I H R G R J
 S I U I I M C S E P Y B T L A E Ñ I K H
 S C M C J V K U L T R A V I O L E T A G
 O O A K Z M I C R O O N D A S J T U R U
 W S M C B I H O O D O I R E P A L D W D



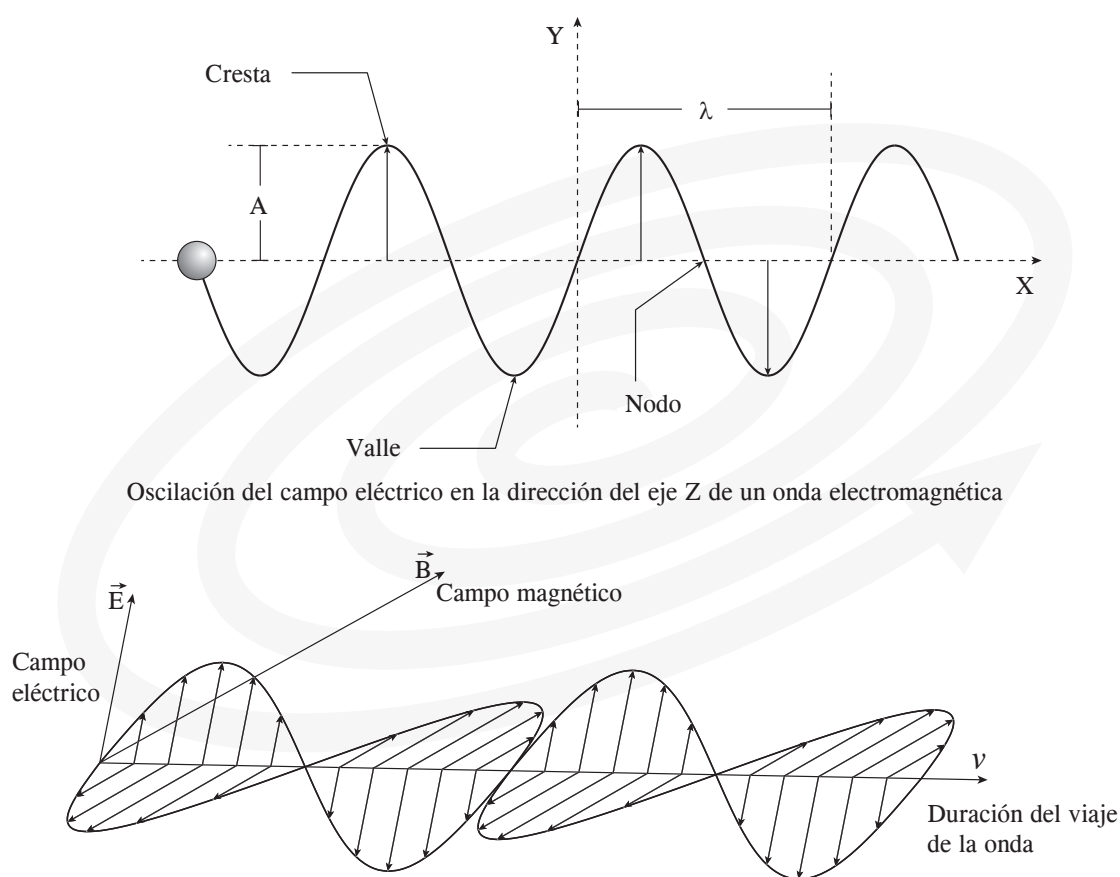
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1. RADIACIONES ELECTROMAGNÉTICAS (REM)

Una onda electromagnética se origina por la perturbación de un campo magnético o un campo eléctrico; debido a ello, dichos campos oscilan o fluctúan perpendicularmente entre sí y viajan a través del espacio a la misma velocidad que la luz (c).

Son ejemplos de radiaciones electromagnéticas: rayos X, luz visible, rayos gamma, microondas, ondas de radio, ondas de TV, rayos infrarrojos, rayos UV, etc.

$$c = 3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$



Podemos considerar como elementos de una onda electromagnética, a los siguientes:

- A. **Longitud de onda (λ):** Es la distancia entre dos crestas adyacentes o la distancia correspondiente a un ciclo u oscilación completa (distancia entre dos nodos alternos). Se expresa en metros (m), centímetros (cm), nanómetros (nm), angstroms (Å), etc.
- B. **Frecuencia (ν):** Es el número de longitud de onda (oscilaciones completas o ciclos que atraviesan un punto dado por unidad de tiempo). La frecuencia de una radiación pasa de un material a otro. Es la recíproca del periodo y se expresa en ciclos/s, s^{-1} =Hertz (Hz).

$$\nu = \frac{\text{Número de ciclos}}{\text{tiempo (t)}}$$

$$\nu = \frac{t}{\text{Periodo (T)}}$$

- C. Velocidad (v):** Nos enseña la rapidez con la que se desplaza la onda. Para una onda electromagnética que se mueve a la velocidad de la luz ($c = 3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$), se cumple

$$c = \lambda \cdot v$$

Como vemos, la longitud de onda y la frecuencia son inversamente proporcionales

- D. Periodo (T):** Es el tiempo que se demora en recorrer una onda completa o realizar un ciclo completo es inversamente proporcional a la frecuencia; se expresa en segundos (s).

$$T = \frac{1}{\text{Frecuencia } (v)}$$

- E. Número de onda ($\bar{v}$):** Es el número de longitudes de onda o números de ciclos presente en una distancia de 1 cm. Lo que es lo mismo la recíproca de la longitud de onda, se expresa en cm^{-1} .

$$\bar{v} = \frac{1}{\lambda}$$

- F. Amplitud (A):** Es la distancia del eje de simetría hasta la cresta (amplitud positiva +A) o hasta el valle (amplitud negativa -A). En el caso de las radiaciones visibles está relacionada con la brillantez o intensidad de luz.

Ejemplo 1

Una radiación electromagnética tiene una longitud de onda de $40 \text{ \AA}$. Determine su frecuencia.

Datos:

$$\lambda = 40 \text{ \AA} = 40 \times 10^{-8} \text{ cm} = 4 \times 10^{-7} \text{ cm}$$

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Resolución:

Por tratarse de una REM se cumple

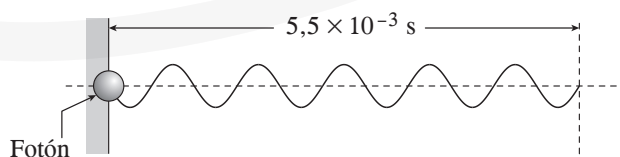
$$c = \lambda \cdot v$$

$$v = \frac{c}{\lambda} \rightarrow v = \frac{3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}{4 \times 10^{-7} \text{ cm}}$$

$$v = 7,5 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} \rightarrow v = 7,5 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

Ejemplo 2

¿Qué frecuencia tiene la REM que muestra la figura?



Datos:

En la figura se observa 5,5 ondas; lo que significa que el tiempo que aparece como dato a 5,5 veces el periodo (T), por tanto se cumple

$$5,5T = 5,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$T = 10^{-3} \text{ s}$$

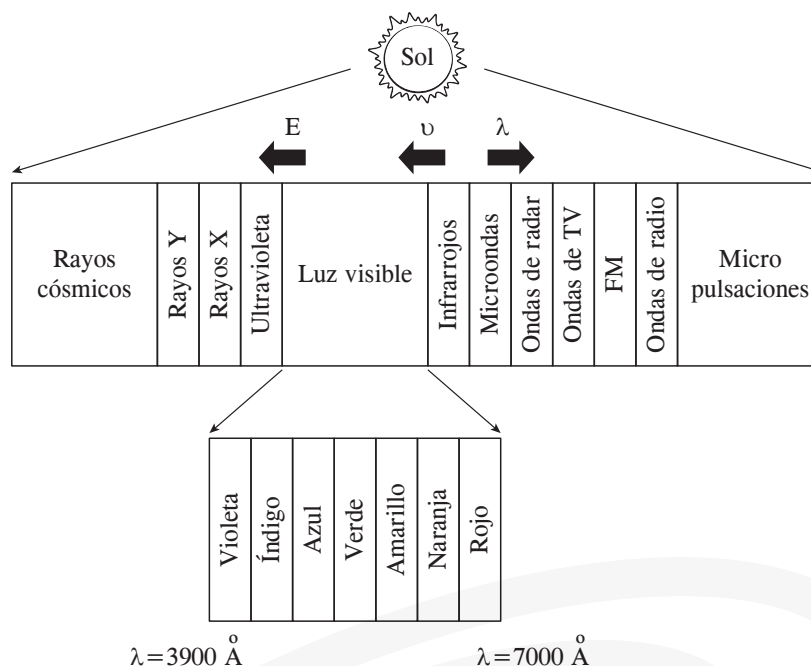
Resolución:

Luego, calculamos la frecuencia (v)

$$v = \frac{1}{T} \rightarrow v = \frac{1}{10^{-3} \text{ s}} \rightarrow v = 10^3 \text{ Hz} \rightarrow v = 1 \text{ kHz}$$

2. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

Es el conjunto de radiaciones provenientes de la radiación solar. Se observa que los rayos cósmicos son las radiaciones más energéticas, pero de menor longitud de onda; lo contrario sucede con las micropulsaciones.



En el espectro visible, la línea violeta es la más energética y de menor longitud de onda; lo contrario sucede con la línea roja.

RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA	ORIGEN
Rayos cósmicos	Reacciones nucleares
Rayos gamma	Reacciones nucleares
Rayos X	En transiciones electrónicas en niveles internos de un átomo.
Rayos ultravioleta	En transiciones electrónicas en niveles externos de un átomo
Radiaciones visibles	En transiciones electrónicas en niveles externos de un átomo
Rayos infrarrojos	En vibraciones moleculares
Microondas	En rotaciones moleculares
Ondas de TV	Mediante circuitos oscilantes
Ondas de radio	Mediante circuitos oscilantes

RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA	APLICACIÓN
Rayos X	Medicina, cristalografía.
Microondas	Horno microondas (cocción de alimentos) y comunicaciones. Análisis químicos para determinar la frecuencia de vibración y rotación molecular.
Rayos infrarrojos	Análisis químicos para determinar la frecuencia de vibración y rotación molecular.
Radiación ultravioleta	Germicida, catalizador en reacciones fotoquímicas, en células fotovoltaicas y para producir luz blanca en tubos fluorescentes.
Luz visible	Análisis químicos por absorción espectroscópica y para visualizar el mundo físico.

3. TEORÍA CUÁNTICA DE LA RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Max Planck (1900) después de estudiar la radiación térmica de los cuerpos negros, llegó a la conclusión que la energía es discontinua: “La radiación electromagnética (REM) emitida o absorbida por un cuerpo se efectúa en forma de pequeñas unidades discretas llamadas cuantos o fotones”. La energía que transporta cada fotón o cuanto depende del tipo de radiación electromagnética, es directamente proporcional a su frecuencia (o inversamente proporcional a su longitud de onda).

Siendo:

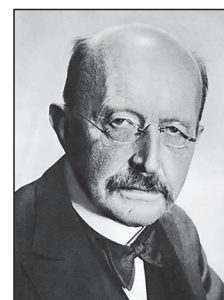
h : constante de Planck

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} = 6,626 \times 10^{-27} \text{ ergios}$$

E : energía de un fotón

$$E = h \cdot \nu$$

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$



Max Planck

Ejemplo 1

Determine la energía para un cuanto cuya frecuencia es de 2,5 MHz.

Datos:

$$E = ?$$

$$\nu = 2,5 \text{ MHz} = 2,5 \times 10^6 \text{ Hz}$$

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}$$

Resolución:

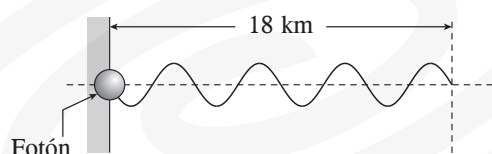
Según M. Planck, para un cuanto cualquiera, se cumple: $E = h \cdot \nu$

$$E = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2,5 \times 10^6 \text{ s}^{-1})$$

$$E = 1,66 \times 10^{-27} \text{ J}$$

Ejemplo 2

Según la figura que se muestra a continuación, determine la energía del fotón.



Datos:

Observe que en la figura se tienen 4 longitudes de onda, entonces

$$4\lambda = 18 \text{ km}$$

$$\lambda = 4,5 \text{ km}$$

$$\lambda = 4,5 \times 10^3 \text{ m}$$

Resolución:

Luego calculamos la energía del fotón con la ecuación de M. Planck

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow E = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \left(\frac{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{4,5 \times 10^3 \text{ m}} \right)$$

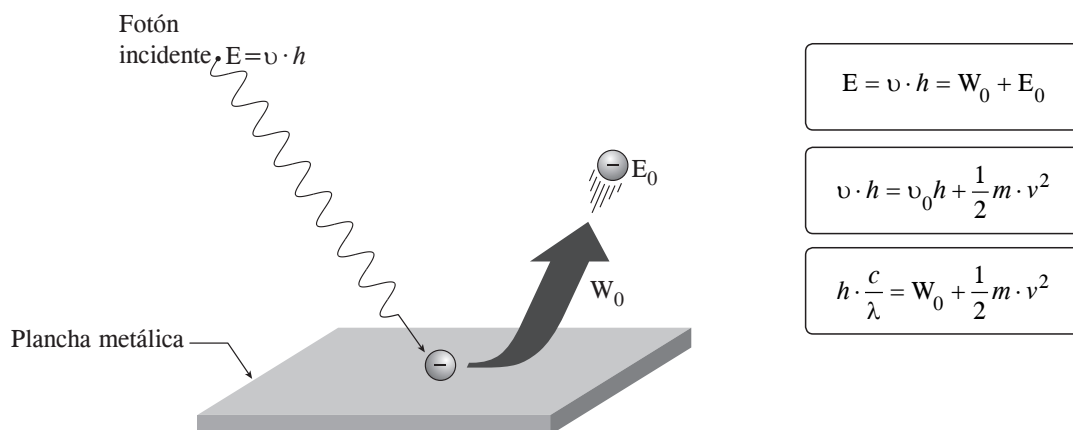
$$E = 4,42 \times 10^{-29} \text{ J}$$

4. EFECTO FOTOELÉCTRICO

En 1887 y en forma accidental H. N. C. Hertz descubrió este fenómeno, entonces estudiaba las ondas electromagnéticas predichas por Maxwell. El efecto fotoeléctrico también fue estudiado por P. Lenard concluyendo que la producción de fotoelectrones solo depende de la radiación electromagnética (REM).

Cuando la radiación electromagnética (o luz) de cierta frecuencia incide sobre una superficie metálica limpia, esta emite electrones con cierta energía cinética.

En realidad, la energía del fotón de la REM se desdoblaba en dos partes: una es la función trabajo (W_0) que es la mínima energía para vencer la fuerza de atracción para el metal sobre el electrón y la otra es energía cinética (E_c) con lo que sale el fotoelectrón. Además, W_0 es característico de cada metal.



Donde

h : constante de Planck

m : masa del electrón

ν : velocidad de los fotoelectrones

W_0 : función trabajo

ν : frecuencia del fotón

λ : longitud de onda

ν_0 : frecuencia umbral (mínima frecuencia del fotón incidente para producir fotoelectrones)

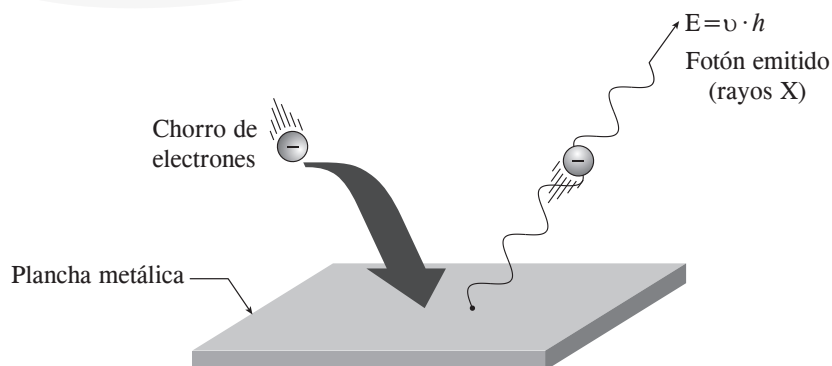
Si $\nu < \nu_0$, entonces no se produce el fenómeno fotoeléctrico.

Si $\nu \geq \nu_0$, entonces se produce el fenómeno fotoeléctrico. Más tarde en 1905, Albert Einstein explicó magistralmente el efecto fotoeléctrico; por lo que recibió el premio Nobel de Física en 1921. Finalmente quedó así demostrada la propiedad corpuscular o propiedad de partícula que tiene la radiación electromagnética (propiedad mecánica).

5. RAYOS X

La denominación rayos X designa a una radiación electromagnética, invisible, capaz de atravesar cuerpos opacos y de imprimir las partículas fotográficas. Los actuales sistemas digitales permiten la obtención y visualización de la imagen radiográfica directamente en una computadora (ordenador) sin necesidad de imprimirla. La longitud de onda está entre 10 a 0,01 nanómetros, correspondiendo a frecuencias en el rango de 30 a 3000 PHz (50 a 500 veces la frecuencia de la luz visible).

Descubiertos por Wilhelm Conrad Röntgen (Alemania). Se producen por el choque violento de los rayos catódicos sobre un obstáculo material llamado "anticátodo". Son ondas electromagnéticas de mayor intensidad que la luz, pero de menor longitud de onda, debido a esto atraviesan cuerpos opacos (radiografías). Los rayos X no poseen carga ni masa, por lo tanto no son afectados ante los campos eléctricos. Son pura energía.



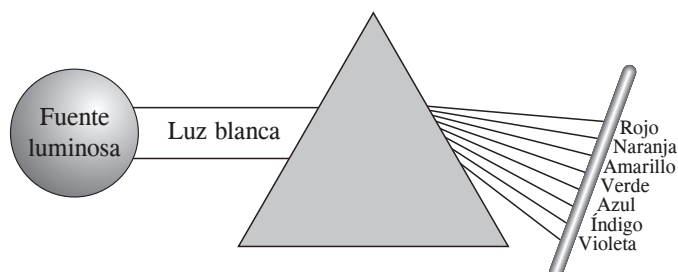
Observación

Los rayos X, de alguna manera, constituyen un fenómeno inverso al efecto fotoeléctrico.

6. ESPECTRO VISIBLE

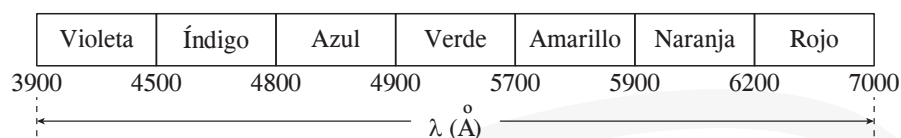
La descomposición de la luz en sus colores o radiaciones se denomina fenómeno de dispersión de luz y la banda coloreada es el espectro visible. Este se produce cuando la luz solar o luz blanca pasa a través de un prisma de vidrio o rejilla de difracción.

El espectro visible es continuo porque la banda de colores no hay ninguna sombra oscura.



Al dispersarse la luz visible, se forma el espectro visible.

El espectro visible está formado por siete líneas cuyas longitudes de onda varían entre 3900 Å y 7000 Å, como se muestra en la figura.



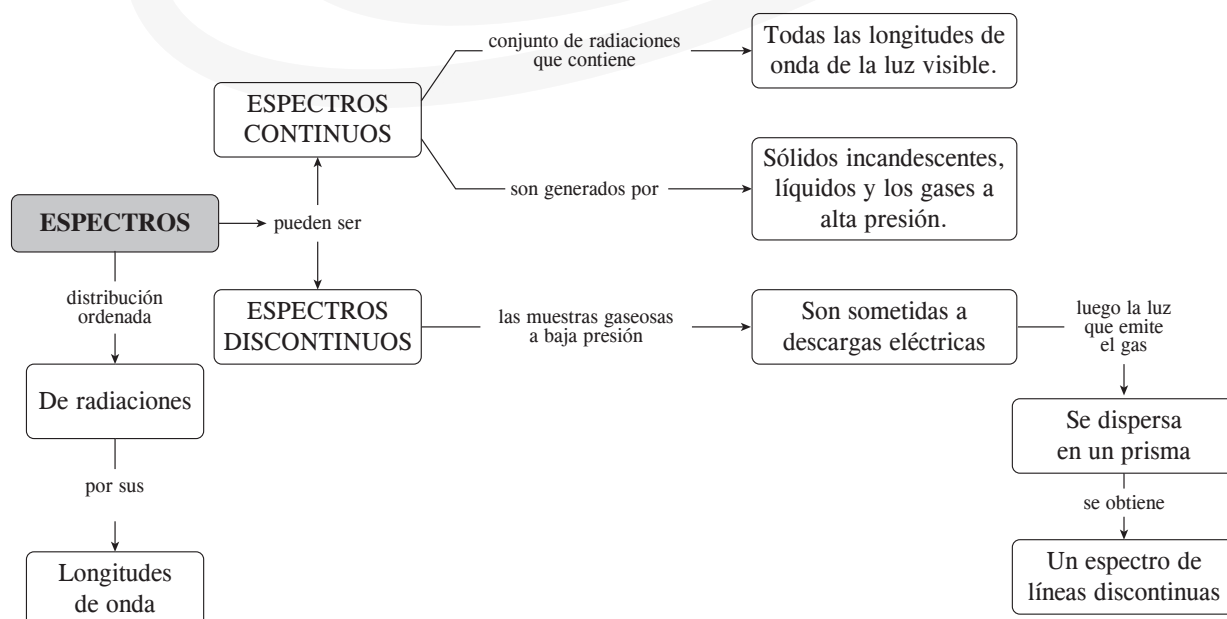
Aumenta la longitud de onda (λ)

Aumenta la frecuencia y energía

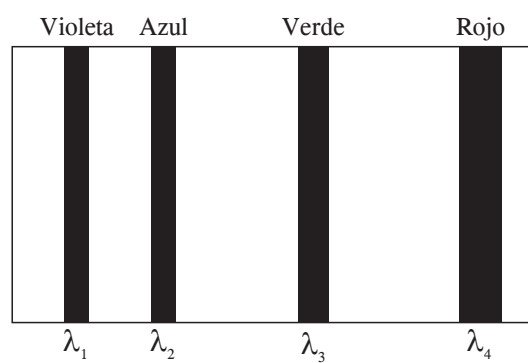
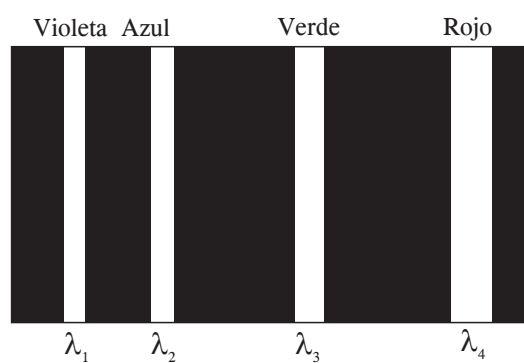
Espectro visible

7. ESPECTRO ATÓMICO DEL HIDRÓGENO

Los elementos químicos en forma de vapor o gas atómico generan un espectro de líneas que es característico de cada elemento (es su huella digital) y que permite su identificación, de este modo se ha descubierto muchos elementos, también se han determinado los tipos de elementos que hay en las estrellas por análisis espectroscópico de la radiación que emiten.

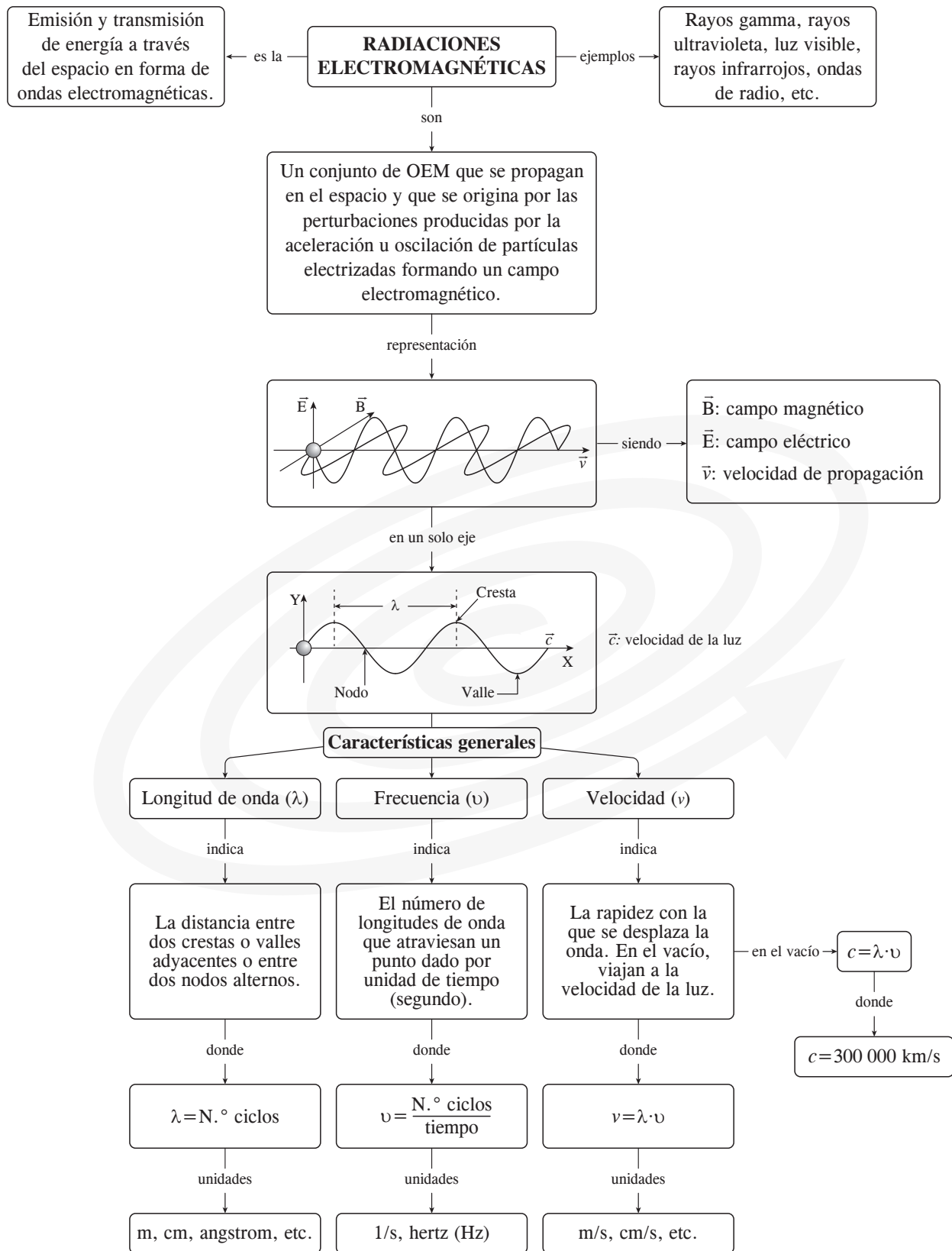


El gas hidrógeno presenta dos tipos de espectro: el de emisión y el de absorción.





Helicósinthesis





1. Si la energía del fotón de una radiación electromagnética es $13,24 \times 10^{-12}$ erg. Determine la frecuencia en s^{-1} . (UNI 1999-1).

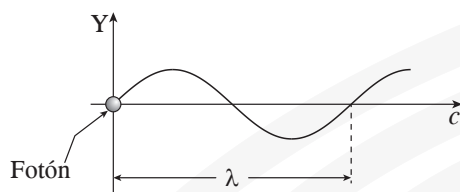
$E = \nu \cdot h$	(Ecuación de Max Planck)
-------------------	--------------------------

$$\nu = \frac{E}{h} \Rightarrow \nu = \frac{13,24 \times 10^{-12} \text{ erg}}{6,62 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}}$$

$$\nu = 2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

Rpta.: $2 \cdot 10^{15}$

2. La longitud de onda y energía de un fotón de luz visible cuya frecuencia es $0,66 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ son respectivamente: (UNI 1990)



I. La longitud de onda y la frecuencia son inversamente proporcionales y su producto equivale al valor de la velocidad de la luz (3×10^{10} cm/s)

$$\lambda \cdot v = c \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v}$$

$$\lambda = \frac{3 \times 10^{10} \text{ cm / s}}{0.66 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}}$$

$$\lambda = 4,54 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

- II. Según Max Planck, la energía de un fotón depende directamente de su frecuencia.

$$E = \nu \cdot h$$

(h : constante de Max Planck)

$$E = (0,66 \times 10^{15} \text{ s}^{-1})(6,63 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s})$$

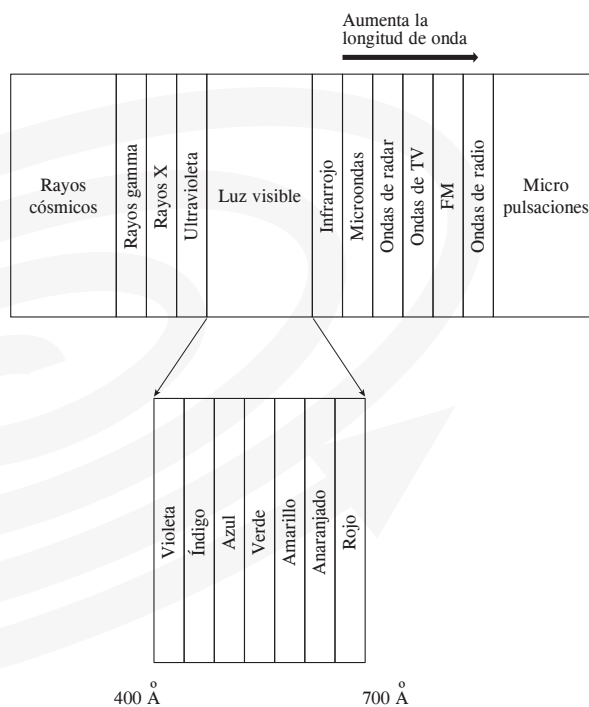
$$E = 4,37 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

Rpta.: $4,54 \times 10^{-5}$ cm y $4,37 \times 10^{-12}$ erg

3. En relación a los tipos de radiación electromagnética, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta. (UNI 2014-2)

- I. La longitud de onda que emite una estación de radio es mayor que la longitud de onda de los rayos X. ()
- II. La longitud de onda de la luz visible está comprendida en el rango de 400 a 700 nm. ()
- III. La longitud de onda de la luz azul es mayor que aquella de la luz amarilla. ()

Resolución



- I. (Verdadero)
 $\lambda_{\text{ondas de radio}} > \lambda_{\text{rayos X}}$
- II. (Verdadero)
Luz visible: $400 \text{ \AA} \leq 700 \text{ \AA}$
- III. (Falso)
 $\lambda_{\text{azul}} < \lambda_{\text{amarillo}}$

Rpta.: VVF

4. La energía de un fotón es de $3,6 \times 10^{-12}$ ergios, ¿cuál es la longitud de onda en angstrom asociada al fotón, cual es la región del espectro electromagnético a la cual pertenece? (UNI 1992)

Datos: $h = 6,62 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$
 $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

Resolución

Según Max Planck

$$E = \nu \cdot h$$

$$E = \frac{c \cdot h}{\lambda}, \text{ entonces } \lambda = \frac{c \cdot h}{E}$$

$$\lambda = \frac{(3 \times 10^{10} \text{ cm} / \text{s})(6,62 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s})}{3,6 \times 10^{-12} \text{ erg}}$$

$$\lambda = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm} \times \frac{1 \text{ Å}}{10^{-8} \text{ cm}}$$

$$\lambda = 5500 \text{ Å}$$

Esta longitud de onda corresponde a la región visible del espectro electromagnético.

Rpta.: 5500; región visible

5. Un foco de 100 watt convierte 16,55 % de la energía que se le suministra en luz visible, cuya frecuencia es de $10 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$. ¿Cuántos fotones por segundo emite el foco de luz? (UNI 2000-2)

Datos: $h = 6,6 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$

1 watt = 1 joule/s

Resolución



$$\text{Pot} = \frac{16,55}{100} \times 100 \text{ watt} = 16,55 \text{ watt}$$

- I. $E = \nu \cdot h$ (Para un fotón)

$$E = 10 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} \cdot 6,6 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$$

$$E = 6,6 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$E = 6,6 \times 10^{-12} \text{ erg} \times \frac{1 \text{ J}}{10^7 \text{ erg}}$$

$$E = 6,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

II. $x \frac{\text{fotones}}{\text{s}} = 16,55 \text{ watt} \times \frac{1 \text{ J/s}}{1 \text{ watt}} \times \frac{1 \text{ fotón}}{6,6 \times 10^{-19} \text{ J}}$

$$x \frac{\text{fotones}}{\text{s}} = 2,5 \times 10^{19} \frac{\text{fotón}}{\text{s}}$$

Rpta.: $2,5 \times 10^{19}$



Helicopráctica

Nivel I

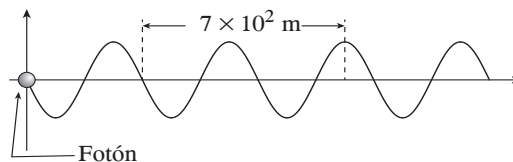
1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - a. Las REM son de naturaleza corpuscular con masa puntual. ()
 - b. La energía de un cuanto o fotón depende directamente de la frecuencia de la REM. ()
 - c. Mientras que la radiación UV es más energética que las microondas, estas tienen mayor longitud de onda. ()

Resolución

2. La REM ultravioleta tiene una longitud de onda igual a 300 nm. Al respecto escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - a. Su frecuencia (ν) se obtiene con la ecuación $\nu = \frac{c}{\lambda}$ donde c : velocidad de la luz. ()
 - b. Presenta mayor energía que la luz visible con $\lambda = 600$ nm. ()
 - c. Un fotón de esta REM tiene una energía de $6,63 \times 10^{-18}$ joule. ()

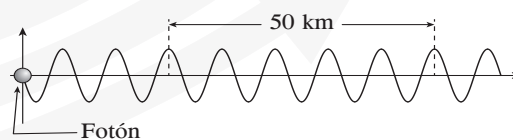
Resolución

3. En la figura mostrada, determine la longitud de onda del fotón.



Resolución

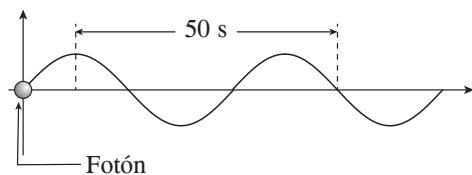
4. ¿Cuál es la frecuencia del fotón que se muestra en la figura?



Resolución

Nivel II

5. Determine la frecuencia del fotón que se muestra en la figura.



Resolución

7. Determine la longitud de onda, en metros, de una radiación de color anaranjado cuya energía es 3×10^{-19} joule.

Dato: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

Resolución

6. La longitud de onda y la energía de un fotón de luz visible cuya frecuencia es $0,66 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ son respectivamente:

Resolución

8. Calcule el número de fotones que emite, durante 1 minuto, una lámpara cuya potencia eléctrica es de 20 watt si emite una luz roja de 700 nm de longitud de onda.

Datos: $1 \text{ watt} = 1 \text{ joule/s}$

$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

Resolución

Nivel III

9. Una bombilla eléctrica emite una luz amarilla cuya longitud de onda es de 580 nm, ¿cuál es la energía, en kJ, de 1 mol de fotones de esa radiación?

$$\text{Datos: } 1 \text{ mol} \Rightarrow N_A = 6,02 \times 10^{23} \frac{\text{Fotones}}{\text{mol}}$$

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ kJ} = 10^3 \text{ J}$$

Resolución

10. La energía de un fotón es de $3,6 \times 10^{-19}$ joule. ¿Cuál es la longitud de onda, en ángstrom, asociada al fotón y cuál es la región del espectro electromagnético al que pertenece?

$$\text{Datos: } h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$1 \text{ Å (ángstrom)} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Resolución

11. Marque la alternativa que indica las radiaciones electromagnéticas en orden creciente de sus frecuencias.

- I. Rayos cósmicos
- II. Microondas
- III. Frecuencia modulada
- IV. Luz visible
- V. Micropulsaciones
- VI. Rayos infrarrojos
- VII. Rayos ultravioleta

A) I-II-III-IV-V-VI-VII

B) V-III-II-VI-IV-VII-I

C) VI-III-II-IV-V-I-VII

D) VII-IV-V-VI-III-II-I

E) III-II-I-IV-VII-VI-V

Resolución

12. La distancia entre dos crestas consecutivas de una onda electromagnética es 3×10^9 m. Determine la energía, en joule, de 1 mol de fotones.

$$\text{Datos: } h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ mol} \Rightarrow N_A = 6,02 \times 10^{23} \frac{\text{Fotones}}{\text{mol}}$$

Resolución



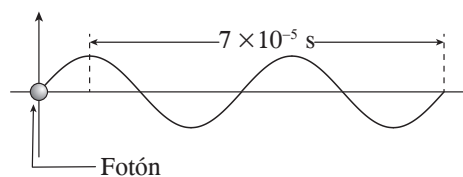
Helicotaller

Nivel I

1. Marque la alternativa que presenta una afirmación incorrecta con respecto a las radiaciones electromagnéticas.
 - A) Es energía pura en forma de fotones.
 - B) Se propagan a la velocidad de la luz.
 - C) Los rayos UV son más energéticos que la luz visible.
 - D) Su longitud de onda y frecuencia son cantidades directamente proporcionales.
 - E) La energía de un fotón de una radiación electromagnética es directamente proporcional a la longitud de onda.

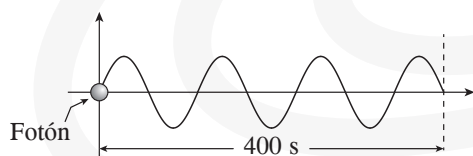
Resolución

3. Determine la longitud de onda del fotón de la figura.



Resolución

2. Determine la frecuencia del fotón que se muestra en la figura.



Resolución

Nivel II

4. Una onda de radio tiene una frecuencia de $3,6 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$. ¿Cuál es la energía, en joule, de un fotón de dicha radiación?

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

Resolución

5. La energía necesaria para producir un cambio químico en



es de 495 kJ/mol proveniente del Sol. ¿Qué tipo de radiación del espectro adjunto es necesario para la fotodisociación?

Dato: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$1 \text{ mol} \Rightarrow N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ fotones/mol}$

Resolución

6. ¿Cuál es la energía de un mol de fotones de cierto REM la longitud de onda es 200 nm?

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$1 \text{ mol} \Rightarrow N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ fotones/mol}$

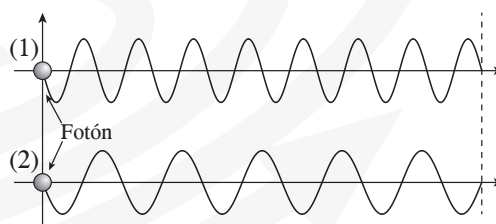
Resolución

Nivel III

7. Al analizar el proceso de fotosíntesis se determinó que la incidencia de 9 cuantos de radiación de longitud de onda de 600 nm desprende dos moléculas de O_2 . Si la energía almacenada en el proceso de fotosíntesis es 112 kcal por mol de O_2 desprendido, ¿cuál es el rendimiento del proceso?

Resolución

8. En la figura mostrada, calcule la relación entre energía del fotón (1) y la energía del fotón (2).



- A) 13: 5
B) 5: 13
C) 11: 16
D) 16: 11
E) 13: 9

Resolución



Test 1

Nivel I

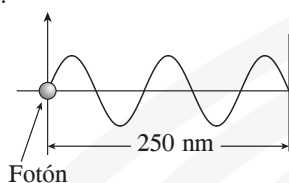
1. El físico alemán Max Planck, en 1900, propuso que el intercambio de energía entre materia y radiación ocurre en cuantos o paquetes de energía. Planck planteó que un átomo que oscila a una frecuencia ν puede intercambiar energía con sus alrededores solo en paquetes de magnitud $h\nu$.

Determine la energía de un fotón de luz azul de frecuencia $6,4 \times 10^{14}$ Hz, en eV.

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s

1 eV = $1,602 \times 10^{-19}$ J

- A) 4,832 B) 3,633
C) 2,645 D) 4,241
E) 3,062
2. Determine la longitud de onda del fotón representado en la figura.



- A) 10^{-7} nm B) 10^{-7} dm C) 10^{-7} cm
D) 10^{-7} m E) 10^{-7} km

Nivel II

3. La radiación emitida por un foco emisor, de un aparato de microondas de uso doméstico, tiene una frecuencia de $2,44 \times 10^9$ s⁻¹. Determine la longitud de una onda, en cm, de esta radiación electromagnética.

Datos: 1 m = 10^2 cm

1 Hz = 1 s⁻¹

- A) 0,123 B) 1,23 C) 12,3
D) 1230 E) 12 300

4. ¿Cuál es la energía, en kJ, de un mol de fotones de cada radiación electromagnética, cuya longitud de onda es 200 nm?

- A) 420,52 B) 598,68 C) 620,32
D) 742,61 E) 862,62

Nivel III

5. Si la energía de un fotón es $3,3 \times 10^{-8}$ joule; determine la longitud de onda asociada al fotón mencionado, en metros.

Datos:

$h = 6,6 \times 10^{-34}$ J · s

$c = 3,0 \times 10^8$ m/s

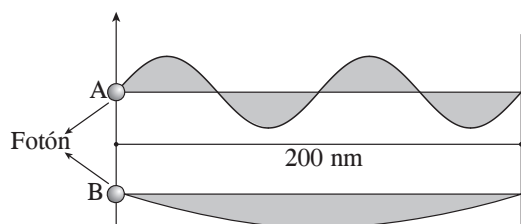
- A) 6×10^{18} B) 2×10^{18}
C) 6×10^{-18} D) 3×10^{-8}
E) $1,8 \times 10^{-12}$



Test 2

Nivel I

1. Calcule la relación de longitudes de onda de los fotones de A con respecto a los fotones de B en la siguiente figura.



- A) 1 B) 0,5 C) 0,25
D) 0,125 E) 0,625
2. En el espectro de emisión del átomo de hidrógeno se observa una línea a 486 nm. Para dicha luz, determine la energía, en joule, que lleva asociada a un mol de fotones.
- A) $2,12 \times 10^2$ B) $2,46 \times 10^5$
C) $3,12 \times 10^6$ D) $4,12 \times 10^7$
E) $5,21 \times 10^8$

Nivel II

3. ¿Cuál es la energía de un fotón de radiación infrarroja, en eV, cuya longitud de onda 1240 nm?
- A) 1 B) 0,6 C) 1,5
D) 0,4 E) 1,2
4. Determine la longitud de onda asociada a una partícula alfa emitida desde un núcleo radiactivo a la velocidad de 2000 km/s (expresé el resultado en nanómetros).
- A) $5,2 \times 10^{-4}$ B) $4,94 \times 10^{-5}$
C) $6,78 \times 10^{-6}$ D) $9,5 \times 10^{-7}$
E) $2,42 \times 10^{-8}$

Nivel III

5. Un espectrofotómetro es un dispositivo utilizado para medir la concentración de ciertas especies químicas en solución. Si en una medición el mencionado equipo da la mayor absorción de luz a 420 nm, determine la frecuencia de esta radiación visible, en Hz.
- A) $3,21 \times 10^{11}$ B) $4,22 \times 10^{13}$
C) $7,14 \times 10^{14}$ D) $8,21 \times 10^{16}$
E) $9,21 \times 10^{17}$



Helicodesafío

1. Para una OEM que se propaga en el aire, determine su frecuencia si su longitud de onda es de $5 \mu\text{m}$.

A) $6 \times 10^{13} \text{ Hz}$ B) $4 \times 10^{13} \text{ Hz}$
 C) $2 \times 10^{14} \text{ Hz}$ D) $2 \times 10^{15} \text{ Hz}$
 E) 10^{15} Hz

2. ¿A qué rapidez debe moverse un electrón para que su energía cinética sea igual a la energía de un fotón de longitud de onda $5200 \text{ \AA}$? Dé la respuesta en 10^5 m/s .

A) 4,2 B) 3,6 C) 5,6
 D) 9,4 E) 8,3

3. Incide un rayo de luz de longitud de onda 400 nm sobre una superficie que tiene una función trabajo de $1,8 \text{ eV}$. Determine la rapidez, en 10^5 m/s , del fotoelectrón más rápido emitido por la superficie.

A) 4,76 B) 5,76 C) 6,76
 D) 3,46 E) 6,16

4. Determine aproximadamente el número de fotones por segundo que emite un láser He-Ne de longitud de onda de 632 nm y cuya potencia es de 3 mW .

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9}$$

A) $34,26 \times 10^3$ B) $67,21 \times 10^3$
 C) $95,32 \times 10^{14}$ D) $134,26 \times 10^{26}$
 E) $235,01 \times 10^{34}$

5. En un experimento de efecto fotoeléctrico, se ilumina un cátodo de oro con radiación de frecuencia $3,4 \times 10^{15} \text{ Hz}$. Frente al cátodo se coloca una placa metálica a $-1,0 \text{ V}$ respecto al cátodo. ¿Cuál es aproximadamente la máxima velocidad con la que un fotoelectrón alcanza la placa? Dé la respuesta en 10^6 m/s .

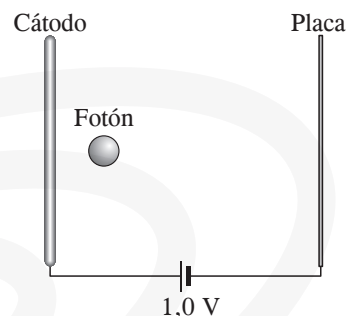
Datos:

Función trabajo del oro = $5,1 \text{ eV}$

Masa del electrón = $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$



A) 0,66 B) 1,66 C) 2,66
 D) 3,66 E) 4,66

MODELOS ATÓMICOS



Objetivos

- Explica y compara las diferentes teorías y modelos atómicos.
- Interpreta los postulados del modelo atómico de Bohr y explica las series espectrales del átomo del hidrógeno.



Curiosidades

Lectura

El modelo atómico de **Bohr** se basa en la mecánica cuántica propuesta por su maestro Max Planck. En el átomo de hidrógeno, el electrón se mueve en una **órbita circular**, según su primer postulado. El segundo postulado habla de las órbitas permitidas, también circulares y con un **radio** determinado. Respecto a la energía constante del electrón, en su tercer postulado, se refiere a los **niveles estacionarios de energía**, la cual aumenta al alejarse más del núcleo. Solamente, dice, en su cuarto postulado, se produce una **emisión** o una **absorción** de energía (**cambio** de energía) cuando el electrón de un nivel superior a otro inferior o viceversa, respectivamente (**saltos electrónicos** o transiciones electrónicas). Por otro lado, las series **espectrales** del hidrógeno se forman debido a las emisiones de energía por saltos del electrón a un nivel inferior. Estas son las **series de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett, Pfund y Humphry**, cuyas longitudes de onda se pueden calcular por la ecuación de Rydberg. Posteriormente se propuso un modelado con órbitas circulares y elípticas (Bohr-Sommerfeld).

Actividad

De acuerdo a la lectura, busque las palabras en negrita en el pupiletras de la siguiente página.



Niels Bohr



Pupiletras

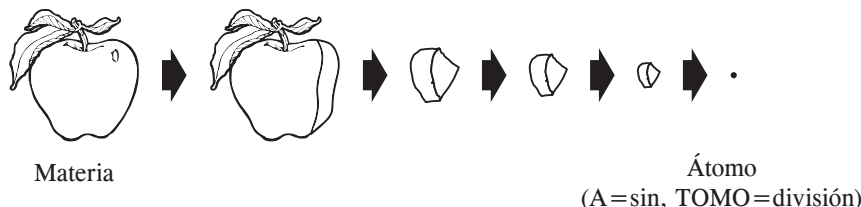
Y U L I F Q D T S J J S L N O K B T K M
 S M P V Ñ G Q C I R C U L A R R V Z Y A
 O Z Z B P Q X N A M Y L P E B Q X H S Ñ
 M U L V J S O V I I K X S H I B K E S O
 M U E S B I P E Ñ G J T Q C T M L Y A D
 E A S F S H L S C R A V E A A A R I L A
 R L X I U Ñ E N Y C R L H I R H T Z T O
 F T M Y W I E D I J E G U T P D M S O P
 E E V A R H B O Y C D P C M H E G S S Q
 L U D E C E N Ñ T Ñ X E U G M O Y Ñ H C
 D A S S R A L R J K P H K R E M L A B X
 D K A G R D O I R S N K B R E J I R R R
 D P G I L N L G E O W I I O Y F D A O F
 F A O L I D K N I S E L E V I N L S O C
 C S X C X D E C C Y A K F Z I W Z E O R
 A O O J N R R V R A D I O S A C X Q H K
 M S U U G O T T L I V Y Y R C Ñ T D O M
 B H F I S V R M G I H C S J S L B V T Ñ
 I P A B A Ñ H T T E K C A R B B O H R N
 O J A H M R Ñ L H Z E K S V U J I X Q M



Helicoteoría

MODELOS ATÓMICOS

1. **Concepciones filosóficas:** En el 450 a. C., el filósofo griego Leucipo propuso que la materia era discontinua y estaba formada por partículas discretas indivisibles a las que se denominó átomos (*a*=sin, *tomo*=división).

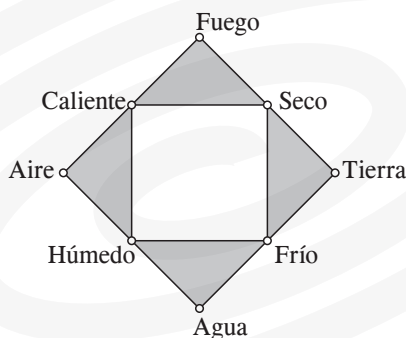


El átomo es el límite de la división de la materia.

Demócrito (380 a. C.), discípulo de Leucipo, planteó que el átomo es el último elemento de la realidad. Manifestó que el átomo era una partícula eterna indivisible, invisible y homogénea.

Se sabe que Epicuro reforzó la propuesta de su maestro Demócrito. Pero Empédocles y sus filósofos de la época rechazaban esta propuesta ya que la consideraban descabellada. Empédocles sostenía que la materia estaba formada por 4 elementos: Tierra, aire, fuego y agua.

Aristóteles (300 a. C.) asoció a los cuatro elementos, cuatro propiedades fundamentales: sequedad, humedad, calor y frío.



Fue el poeta romano, Lucrecio (50 a. C.) quien se encargó de defender estas doctrinas atomísticas en el poema *De rerum natura*.

Por su parte, el físico y químico inglés Robert Boyle (1661) reconoce la existencia del átomo en su libro: *El químico empírico*.

También Isaac Newton, en sus obras: *Principia* (1687) y *Óptica* (1704) reconoce la teoría de la materia.

2. **Concepciones científicas acerca del átomo:** Muchos fueron los experimentos que desarrollaron los científicos para explicar la naturaleza y la composición de la materia. Podemos mencionar:
- Teoría molecular de Dalton
 - Los rayos catódicos y el descubrimiento del electrón
 - Experimento de la gota de aceite
 - Los rayos canales
 - Experimento de Rutherford
 - Radiaciones electromagnéticas
 - Teoría cuántica
 - Efecto fotoeléctrico
 - Espectro visible
 - Espectro atómico del hidrógeno
 - Espectro de emisión y espectro de absorción
 - Series espectrales de emisión del átomo de hidrógeno

3. **Teoría atómico-molecular de Dalton (1808):** En su obra *New system of chemical philosophy* (Nuevo sistema de la filosofía química) utiliza símbolos arbitrarios para explicar como son los átomos y las moléculas.

ELEMENTOS



Azufre



Carbono



Hidrógeno



Nitrógeno



Oxígeno



Potasio

COMPUESTOS



Agua



Monóxido de azufre



Monóxido de nitrógeno



Monóxido de carbono



Dióxido de azufre



Dióxido de carbono



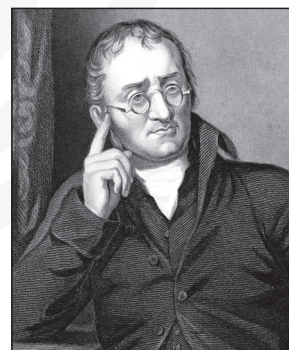
Hidruro de potasio



Hidróxido de potasio

La teoría de Dalton se puede resumir en los siguientes postulados:

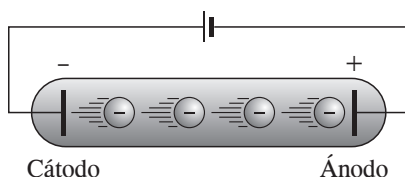
- Primer postulado:** Todos los elementos químicos están constituidos por partículas discretas, invisibles e indivisibles (incluso en las reacciones químicas más violentas) llamadas átomos.
- Segundo postulado:** Los átomos de un mismo elemento son idénticos en todas sus propiedades, especialmente en tamaño y peso (masa).
- Tercer postulado:** Los átomos de elementos diferentes son diferentes en todas sus propiedades.
- Cuarto postulado:** En las reacciones químicas, existe un reordenamiento de átomos sin que el átomo se divida o destruya. La molécula del compuesto resulta entonces de la superposición de los átomos de elementos diferentes.
- Quinto postulado:** Los átomos de dos elementos pueden combinarse en más de una relación entera y sencilla para formar más de un compuesto.



John Dalton

4. **Rayos catódicos y el descubrimiento del electrón:** En 1874, el científico George Stoney después de estudiar los experimentos de Faraday sobre la electrólisis, sugirió las cantidades de carga asociadas a los átomos y propuso llamarlos electrones.

Los rayos catódicos fueron descubiertos por Julius Plücker (1859) y estudiados a más profundidad por J. Hittorf y William Crookes. Este último construyó el conocido tubo de descargas.

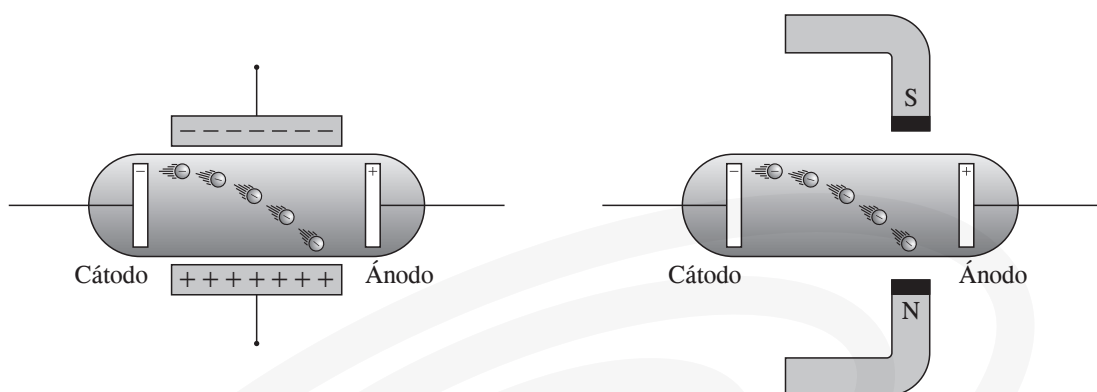


Los rayos catódicos se caracterizan porque:

- Hacen girar un molinete, si este se encuentra en trayectoria, por lo tanto, deben ser de naturaleza corpuscular (poseen propiedades de partículas).

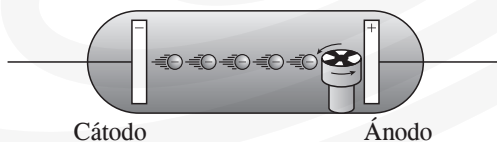
- b. Producen sombras cuando se coloca un objeto en su trayectoria, por tanto viajan en línea recta.
- c. Son desviados por campos magnéticos y eléctricos, por lo tanto son flujos de partículas cargadas o electrizadas.
- d. Ionizan gases, por que los rayos catódicos chocan con los electrones de los átomos y logran expulsarlos, generándose así sus cationes.
- e. Producen luminiscencia en una pantalla fluorescente colocada y paralela a ella.
- f. Producen fluorescencia en las paredes del propio tubo de rayos catódicos y sobre diversas sustancias: se ve que el sulfuro de zinc (ZnS) brilla con verde-azulado, el fluoruro de calcio (CaF₂) con luz violeta, y el yeso (CaSO₄ · 2H₂O) con luz anaranjada, etc.

John Joseph Thomson (1897), experimentó con los rayos catódicos. Demostró que los rayos catódicos experimentaban una desviación dentro de los campos eléctricos y magnéticos. Además demostró que hacían girar las aspas de un molinete. De esta forma descubre el electrón como parte de la materia. Le puso el nombre de electrón a la partícula cargada negativamente, tal como lo propuso anteriormente Stoney.



Los rayos catódicos son desviados por las partículas eléctricas.

Los rayos catódicos son desviados por los campos magnéticos.



Los rayos catódicos tienen naturaleza corpuscular y hacen girar las aspas de un molinete.

Thomson logró obtener la relación carga-masa del electrón:

$$\frac{e}{m} = 1,758 \times 10^8 \frac{\text{coulomb}}{\text{gramo}}$$

Debido a este valor se concluyó que el electrón era la partícula elemental más liviana.

La producción de los rayos catódicos no depende de la naturaleza del gas presente en el tubo de descargas ni del tipo de materia de los electrodos o de la fuente de voltaje, esto quiere decir que los electrones son partículas fundamentalmente presentes en los átomos, situación que ha quedado plenamente demostrado.

5. **Determinación de la carga del electrón:** Robert A. Millikan (1909) logró determinar la carga del electrón con su experimento de las “gotas de aceite”.

El equilibrio de la fuerza gravitacional se iguala con la fuerza eléctrica. De tal manera que la cargas de todas las gotas son múltiplos de una carga fundamental que es la carga del electrón. El valor encontrado por Millikan fue $1,591 \times 10^{-19}$ coulomb.

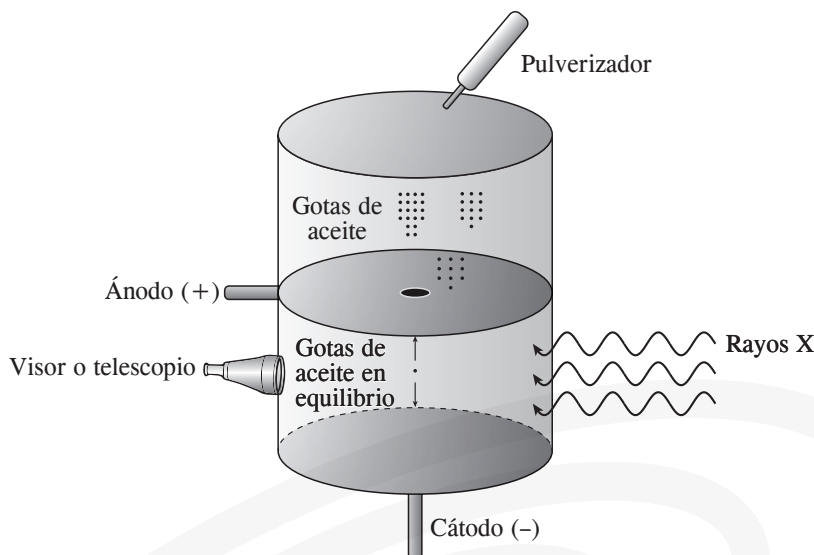
Actualmente se ha demostrado con cálculos más sofisticados que la carga del electrón es $1,6022 \times 10^{-19}$ coulomb.

Luego de la relación-masa del electrón se tiene:

$$\frac{1,602 \times 10^{-19} \text{ C}}{m} = 1,758 \times 10^8 \frac{\text{coulomb}}{\text{gramo}}$$

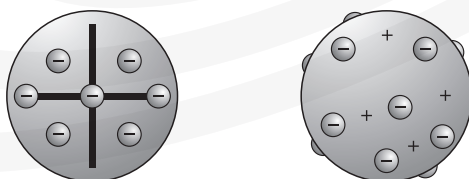
Finalmente, la masa del electrón es:

$$m = 9,1095 \times 10^{-28} \text{ g}$$



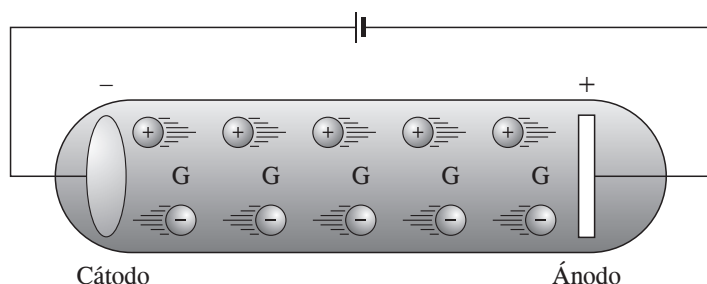
Experimento de las gotas de aceite

6. **Modelo atómico de J. J. Thomson:** Después del descubrimiento del electrón, Thomson propone el primer modelo atómico. El átomo es una esfera cargada positivamente y en su cuerpo se encuentran “embebidos” (incrustados) los electrones (partículas negativas). Los electrones desarrollan movimiento vibratorio y están en cantidad suficiente como para neutralizar la carga positiva de la esfera, por lo tanto en este modelo el átomo es neutro. El modelo atómico de J. J. Thomson es conocido como “budín de pasas”.



Modelo “Budín de pasas” de J. J. Thomson

7. **Los rayos canales y la existencia de protones:** Eugene Goldstein se percató de una fluorescencia o brillo detrás del cátodo en un tubo de rayos catódicos al que se le había perforado previamente (canales u orificios). Esto se debía a que los gaseones (partículas cargadas positivamente de los gases conductores en el tubo de descarga) viajaban del ánodo al cátodo. Estos rayos se conocen como rayos anódicos o rayos canales.



La naturaleza de los rayos canales varía de acuerdo a la naturaleza del gas residual que se encuentra en el tubo, o que es lo mismo: Cada elemento genera un catión diferente (gaseón) al ionizarse y por ello su relación carga-masa es diferente.

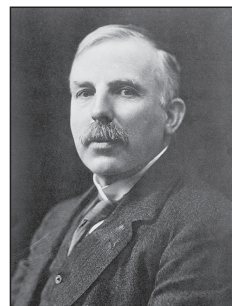
Posteriormente, después de varios experimentos con rayos canales, Wilhelm Wein (1898) logra determinar la carga positiva era igual a la del electrón y que su masa era aproximadamente 1836 veces la masa del electrón. Esta partícula era el protón.

Entonces, allá por el año 1919, Ernest Rutherford logró protones por primera vez mediante una transmutación nuclear y demostró que estos son partículas elementales de todos los núcleos atómicos.

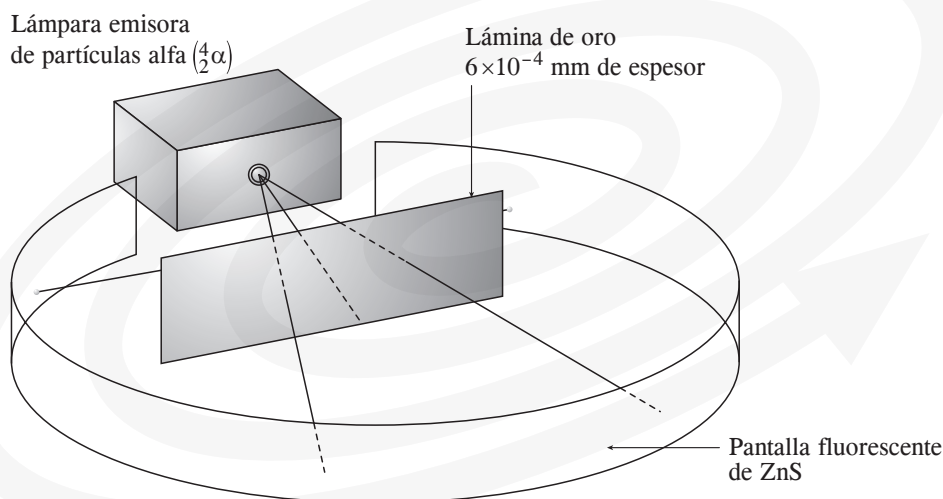
8. **Experimento de Rutherford y el descubrimiento del núcleo atómico:** Ernest Rutherford (1909), con ayuda de Hans Geiger, y el recién graduado Ernest Marsden bombardeó con partículas alfa (α) una lámina muy delgada de oro (pan de oro) cuyo espesor era de 0,0006 mm (0,6 μ m). Las partículas alfa, que eran núcleos de helio, tenían gran masa y gran velocidad, estaban formadas por dos protones y dos neutrones (${}^4_2\text{He}^{2+}$).

Se observó que la mayoría de las partículas alfa atravesaban la lámina de oro sin sufrir ninguna desviación. Solo una pequeña cantidad de rayos alfa se desviaban con ángulos de desviación o dispersión (θ ; $0^\circ < 180^\circ$) y algunas partículas rebotaban totalmente.

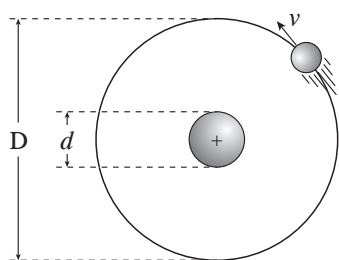
Rutherford explicó la dispersión de los rayos alfa asumiendo que el átomo tiene una parte central o núcleo atómico, de carga positiva, compacto, macizo y denso, el cual tenía casi toda la masa atómica. La desviación de los rayos alfa se produce por las fuerzas de repulsión magnética que provoca el campo eléctrico del núcleo atómico. Sostuvo que el átomo hueco, es casi vacío y que los electrones son partículas insignificantes que ocuparían espacios grandes girando alrededor del núcleo.



Ernest Rutherford



9. **Modelo atómico de Rutherford:** Según Rutherford, el átomo es un sistema dinámico con el núcleo de carga positiva y los electrones giran a su alrededor siguiendo trayectorias circulares y concéntricas con su gran velocidad, de tal forma que se equilibra la fuerza eléctrica ejercida por el núcleo; esto es, los electrones estarían girando en equilibrio. Este modelo propuesto por Rutherford se conoce como el “modelo planetario” (los electrones se mueven alrededor del núcleo así como los planetas se mueven alrededor del Sol).



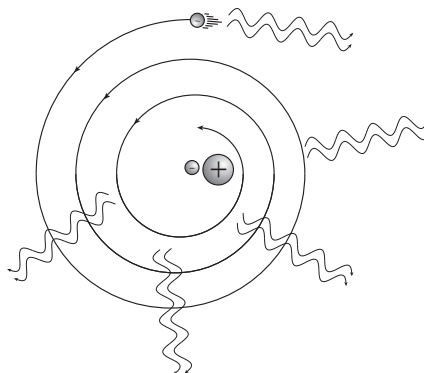
$$d = \frac{D}{10000}$$

$$V_A = 10^{12} V_N$$

V_A : volumen del átomo

V_N : volumen del núcleo

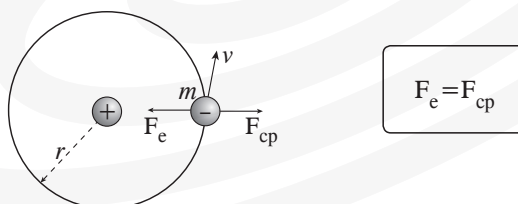
- 10. Error en el modelo de Rutherford:** En la física clásica, una partícula cargada eléctricamente que se mueve con velocidad variable (con aceleración) emite (pierde) constantemente energía en forma de ondas electromagnéticas. Por lo tanto, el electrón al ser una partícula cargada negativamente y al moverse con aceleración angular en una trayectoria circular, debe constantemente perder energía y acercarse poco a poco al núcleo, hasta caer finalmente sobre él. Esto significaría la destrucción de átomo, cosa que no es así. Esto significaba que la física clásica no es suficiente para que explique los fenómenos relacionados con el átomo. Era necesario encontrar nuevas leyes; una nueva era de física se vislumbraba.



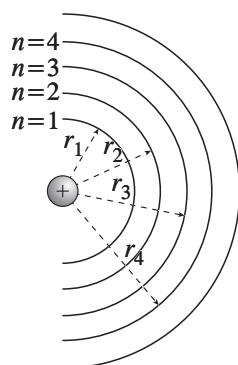
- 11. Teoría atómica de Niels Bohr:** En 1913, Niels Bohr desarrolló un modelo atómico abandonando las consideraciones de la física clásica y tomando en cuenta la teoría cuántica de Max Planck.

El modelo atómico de Niels Bohr está basado en cuatro postulados.

- a. Primer postulado (estabilidad del electrón).** El electrón gira alrededor del núcleo en trayectoria circular en estado de equilibrio, de tal forma que las fuerzas radiales suman cero. Las fuerzas principales que actúan sobre el electrón son la fuerza de atracción eléctrica (F_e) y la fuerza centrípeta (F_{cp}), que es igual a la fuerza centrífuga.



- b. Segundo postulado (órbitas o niveles permitidos):** El electrón solo podrá girar en niveles u órbitas permitidas. Solo son posibles aquellas órbitas donde se cumple que el producto de la cantidad del movimiento del electrón por la longitud de la órbita es igual a un número entero de veces de constante de Planck.



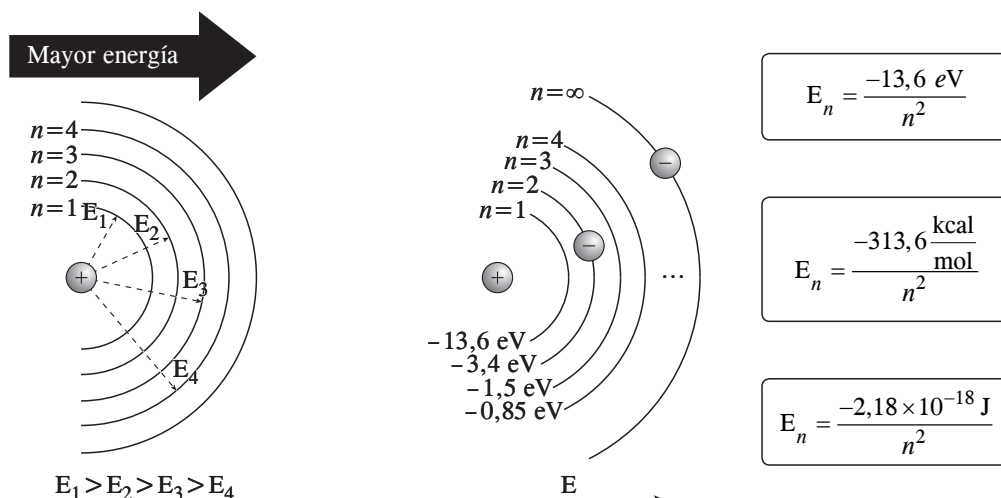
$$V_n = \frac{2,2 \times 10^8}{n} \text{ (cm/s)}$$

$$R_n = a_0 n^2 \left(\overset{\circ}{\text{A}} \right); (a_0 = 0,53)$$

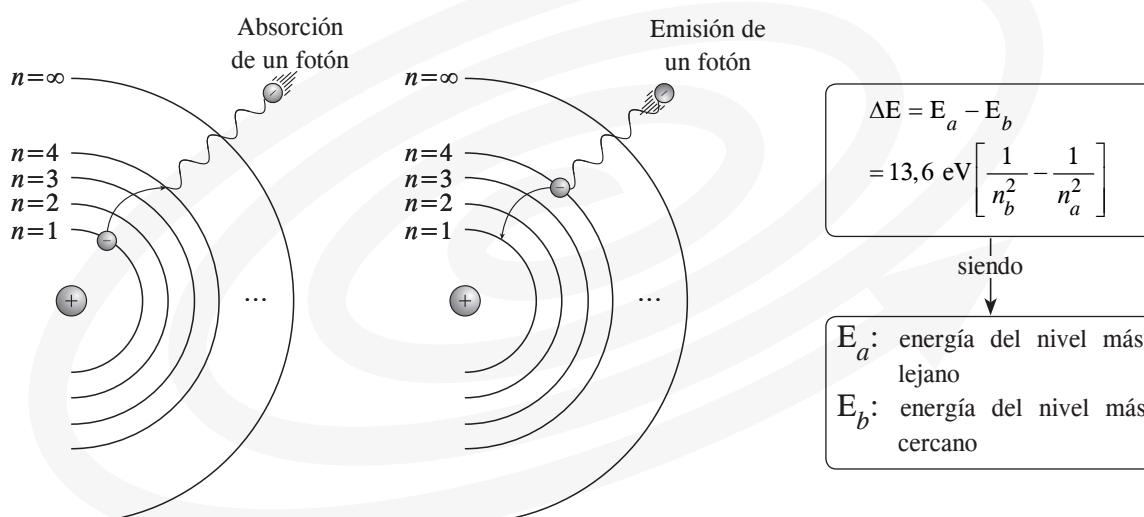
$$mv \cdot 2\pi r = nh$$

- c. Tercer postulado (niveles estacionarios de energía).** Mientras el electrón gira en el mismo nivel u órbita permitida, no pierde ni gana energía ya que dichas órbitas son estados estacionarios de energía cuantizada.

Cada órbita tiene una energía definida.



- d. **Cuarto postulado (emisión y absorción de energía).** El electrón emite o absorbe energía solamente cuando realiza una transición electrónica de un nivel a otro. Si salta de un nivel superior a otro inferior, emite energía y salta de un nivel inferior a otro superior, gana energía que se absorbe o se emite se produce en forma de pequeños paquetitos de fotones (cuantos).



El electrón absorbe o emite energía, solamente cuando sufre transiciones de un nivel a otro.

12. **Especies hidrogenoides o monoeléctricas:** Las especies hidrogenoides son aquellos isoelectrónicos con el átomo de hidrógeno, tienen un solo electrón. Estos son: He^+ ($Z=2$); Li^{+2} ($Z=3$) y Be^{3+} ($Z=4$), etc. Según Bohr para estas especies hidrogenoides, por parte de más de un protón por lo tanto los cálculos correspondientes se deben efectuar de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- a. **Velocidad o rapidez (v_n) del electrón, en el nivel n**

$$v_n = \frac{2,2 \times 10^8}{n} \cdot Z \text{ (cm/s)}$$

Siendo

n : órbita o nivel

Z : número atómico

De acuerdo a la fórmula anterior, el electrón en las especies hidrogenoides tendría mayor velocidad en la órbita para contrarrestar la atracción eléctrica por parte del núcleo.

b. Radio (R_n) de la órbita del electrón, en el nivel n

$$r_n = \frac{a_0 \cdot n^2}{Z}$$

Siendo:

$$a_0 (\text{radio atómico de Bohr}) = 0,529 \text{ \AA} \approx 0,53 \text{ \AA}$$

De la fórmula anterior se deduce que el electrón, en las especies hidrogenoides, tiene menor radio respecto al átomo de hidrógeno debido a la mayor atracción que soporta por parte del núcleo.

c. Energía de un nivel (E_n)

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} Z^2$$

La energía de un electrón en cada órbita es más alta que el átomo de hidrógeno.

Entonces para calcular la energía del fotón emitido o absorbido se tiene:

$$\Delta E = 13,6 \text{ eV} \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n_a^2} \right)$$

d. Potencial de ionización o energía de ionización (PI)

$$PI = (13,6 \text{ eV})(Z)^2$$

La energía para arrancar el único electrón es mayor en los hidrogenoides; esto es, para vencer la fuerza de atracción del núcleo.

13. Limitaciones de la teoría de Bohr

- Solo es aplicable para los átomos con un solo electrón: H , ${}_2\text{He}^+$, ${}_3\text{Li}^{2+}$ y ${}_4\text{Be}^{3+}$, etc. y no explica los fenómenos que se dan en los átomos polielectrónicos (con más de un electrón).
- No explica el efecto Zeeman (desdoblamiento de líneas espectrales cuando el átomo es sometido a la acción de un campo magnético externo), por lo tanto, la existencia de subniveles.
- Contradice el principio de incertidumbre de Heisenberg al plantear trayectorias definidas por los electrones cuando giran alrededor del núcleo atómico.

14. Series espectrales de emisión del átomo de hidrógeno: Los espectros de emisión y absorción del hidrógeno atómico fueron descubiertos por diferentes hombres de ciencia. Las longitudes de onda abarcan una parte de espacio electromagnético total, que va desde la radiación ultravioleta hasta el infrarrojo.

Las primeras líneas espectrales de hidrógeno fueron descubiertos por J. J. Balmer en 1885, estas correspondían a la región visible del espectro electromagnético; más adelante Lyman halló una serie en la región ultravioleta; Paschen, Brackett y Pfund cada uno de ellos una serie en la región infrarroja.

Entonces J.R. Rydberg descubrió que las longitudes de onda de diversas líneas del espectro de hidrógeno se determinan mediante la siguiente ecuación matemática:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Donde:

$n_1 < n_2$ (números enteros positivos que representan a cada nivel)

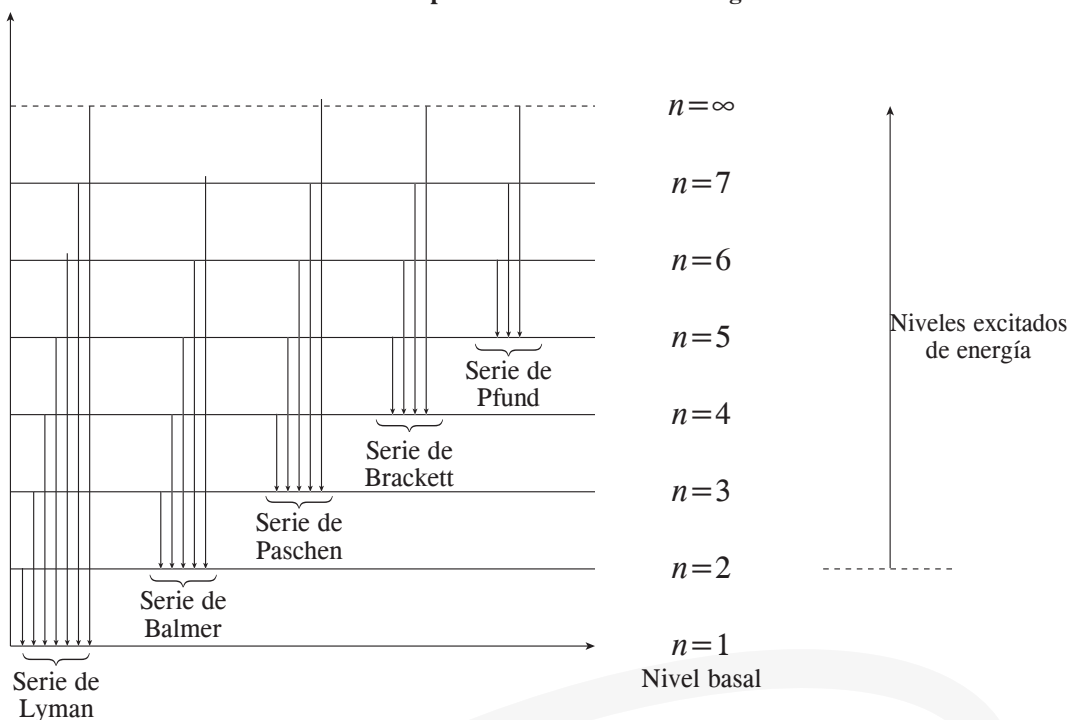
$R_H = 109\,678 \text{ cm}^{-1} = 1,1 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$ (constante de Rydberg para el hidrógeno).

Para cada salto electrónico de un nivel superior a otro inferior se emite un fotón, que la placa fotográfica aparece como una línea brillante.



J. J. Balmer

Series del espectro de emisión del hidrógeno



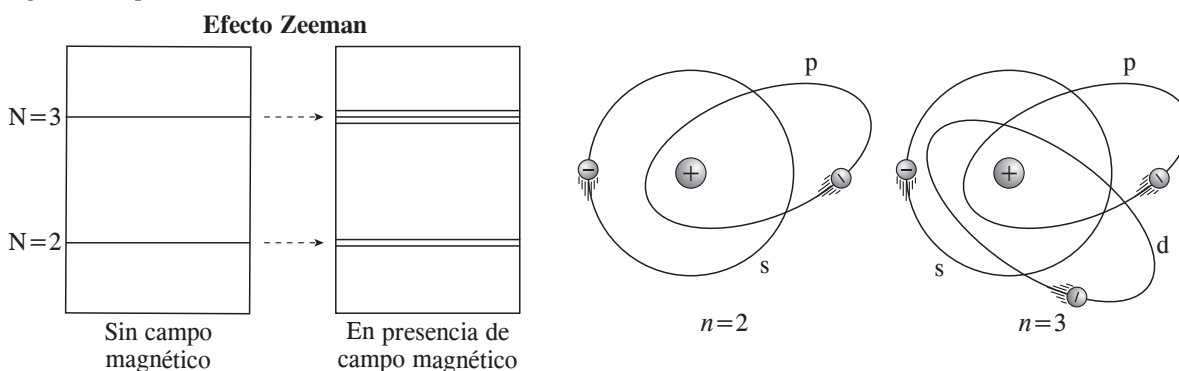
Las series espectrales del átomo de hidrógeno se encuentran dentro de la región ultravioleta, visible e infrarroja, que según Bohr se origina por saltos electrónicos tal como se indica en la siguiente tabla:

Serie espectral	Nivel de llegada (n_1)	Nivel de partida (n_2)	Región del espectro
Lyman	1	2; 3; 4;...	Ultravioleta
Balmer	2	3; 4; 5;...	Visible
Paschen	3	4; 5; 6;...	Infrarrojo cercano
Brackett	4	5; 6; 7;...	Infrarrojo medio
Pfund	5	6; 7; 8;...	Infrarrojo lejano
Humphry	6	7; 8; 9;...	Infrarrojo muy lejano

- 15. Modelo atómico de Bohr-Sommerfeld (1915):** Los trabajos de Peter Zeeman (1896) en espectroscopía óptica con aplicaciones de campos magnéticos, sirvieron para demostrar que las líneas espectrales se desdoblán en líneas más finas. A este fenómeno se le conoce con el nombre de efecto Zeeman.

A partir de este fenómeno, Arnold Sommerfeld sugiere que en el átomo de hidrógeno, el electrón, además de elípticas y circulares deben de estar relacionadas con los subniveles o subcapas de energía.

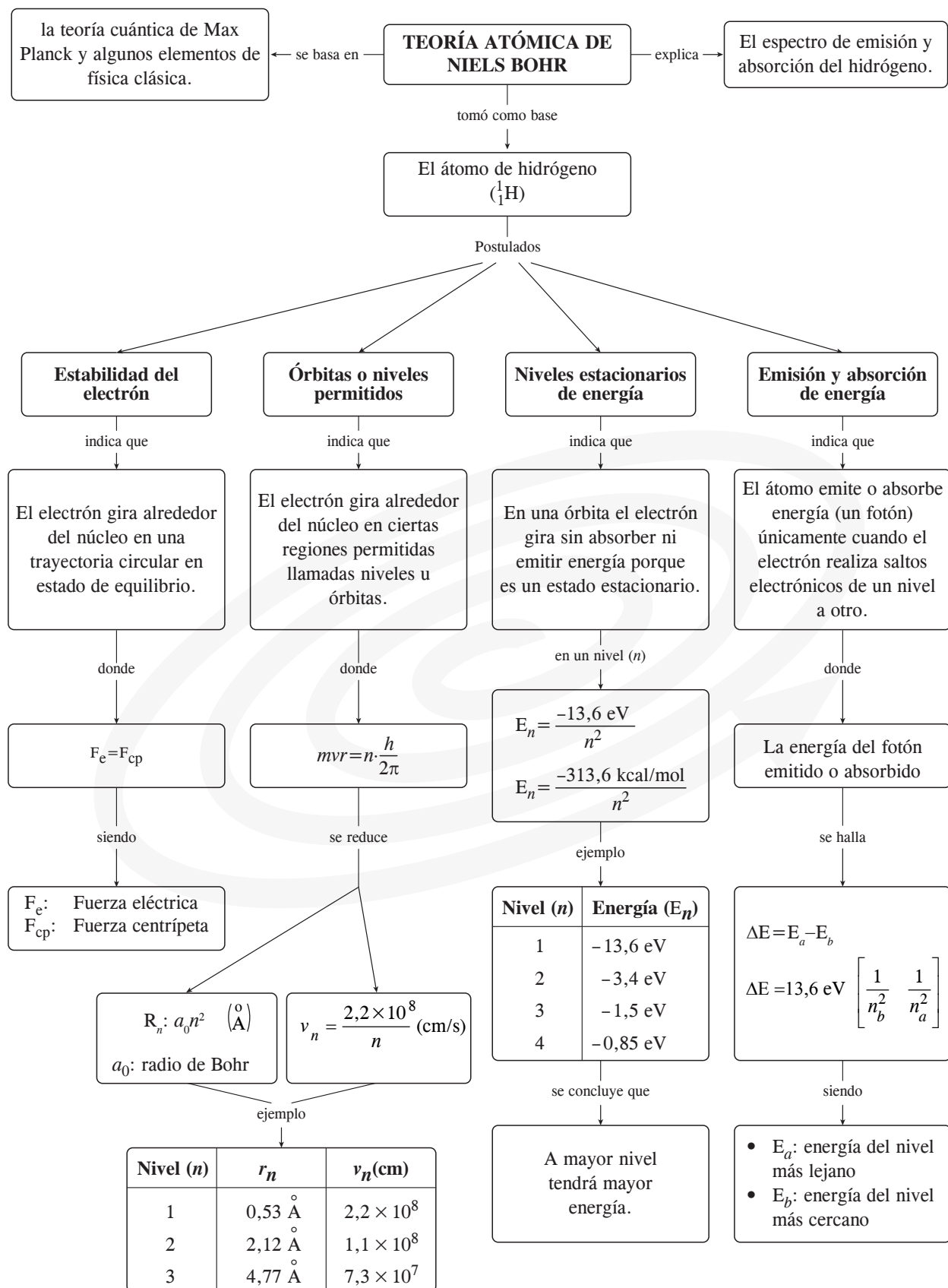
Según Bohr-Sommerfeld se tienen los subniveles de energía en los niveles $n=2$ y $n=3$ como se muestra en el siguiente esquema:

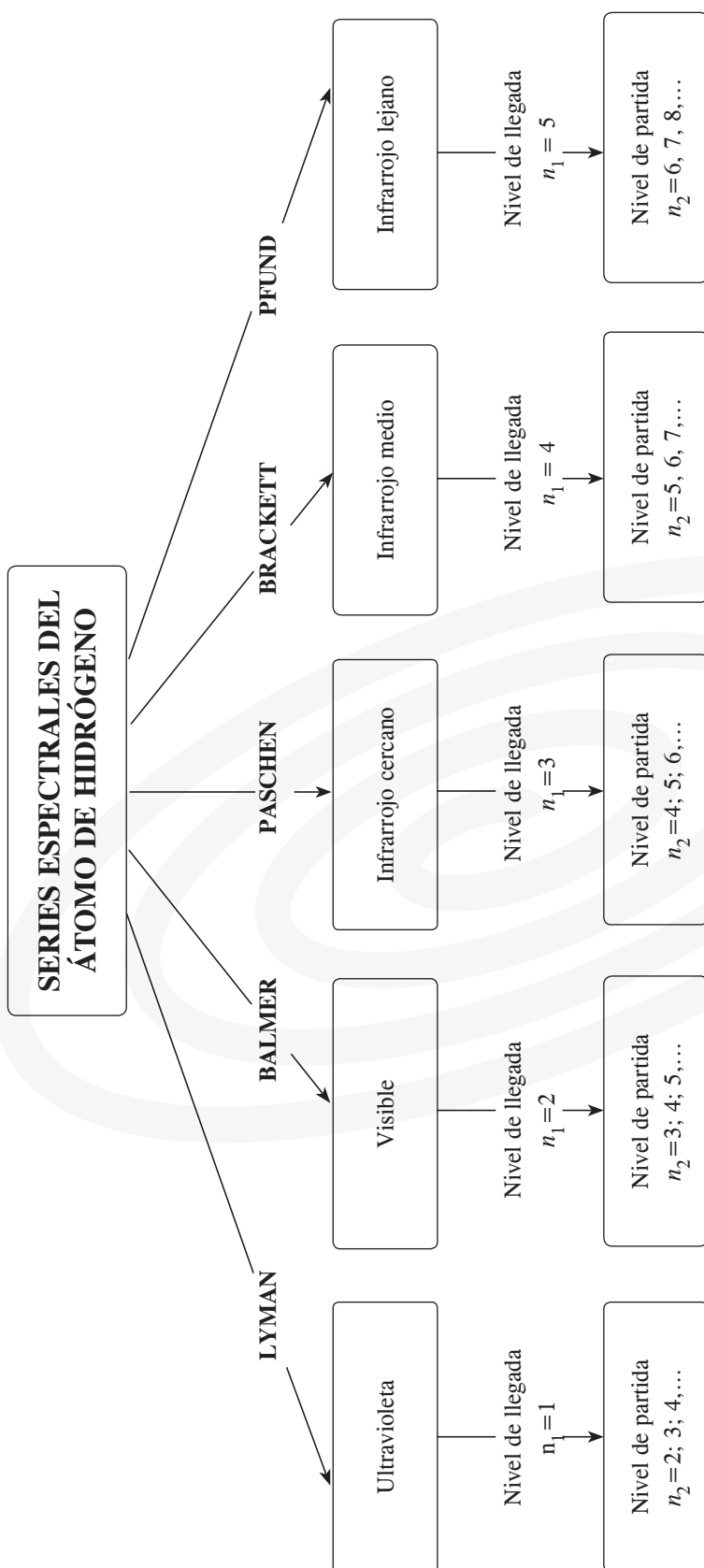


Las líneas espectrales correspondientes al salto electrónico de $n=2$ a $n=1$ y de $n=3$ a $n=1$ se desdoblan en presencia de un campo magnético externo muy intenso.



Helicótesis







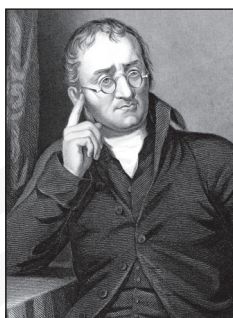
Problemas resueltos

1. Marque la alternativa con la proposición falsa en los hechos de la teoría atómica de Dalton. (UNI 1984-2)

- A) Los elementos químicos consisten de partículas muy pequeñas llamadas átomos, porción hasta la cual el elemento conserva sus propiedades particulares.
- B) Hay tantas clases químicamente distintas de átomos, como elementos existen.
- C) En un elemento, sus átomos son diferentes.
- D) Los compuestos están formados por la combinación de átomos de elementos diferentes.
- E) Los átomos permanecen indivisibles en las reacciones químicas en las cuales solo intervienen números enteros de átomos.

Resolución

John Dalton propuso la primera teoría atómica, en la cual se habla de átomos iguales de un mismo elemento químico, de átomos de diferentes elementos. Estos átomos son muy pequeños; además son impenetrables, indestructibles e indivisibles.



John Dalton

Por otro lado, los compuestos están formados por la combinación de átomos de elementos diferentes.

Rpta.: En un elemento, sus átomos son diferentes.

2. De los postulados del modelo atómico de Bohr, ¿cuáles son considerados en la teoría atómica moderna? (UNI 1996-2)

- I. En un átomo, el electrón tiene únicamente ciertos estados estacionarios de energía que le son permitidos.
- II. En cualquiera de estos estados, el electrón se mueve siguiendo una órbita circular alrededor del núcleo.
- III. Los electrones pueden alcanzar niveles de mayor o menor energía cuando absorben o emiten una cantidad definida de energía.

Resolución

- I. Correcto: En el átomo de Bohr existen estados estacionarios de energía (n).

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}; E_0 = -13,6 \text{ eV}$$

- II. Incorrecto: La teoría atómica moderna no considera órbitas (trayectorias circulares); menciona de regiones de probabilidad REEMPE, donde probablemente se encuentra el electrón.
- III. Correcto: Las transiciones electrónicas se dan cuando el electrón salta de un nivel energético a otro absorbiendo o liberando energía.

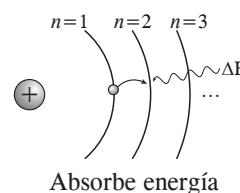
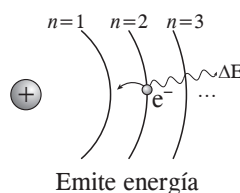
Rpta.: I y III

3. De las siguientes proposiciones respecto al modelo de Bohr, ¿cuáles son las correctas? (UNI 2018-1)

- I. Propone la existencia de estados energéticos cuantizados para los electrones.
- II. Un nivel energético es una órbita circular con energía específica y constante.
- III. El electrón puede absorber energía solo cuando pasa de un nivel energético a otro.

Resolución

- I. Correcta: En el modelo atómico de Bohr, los electrones se encuentran en niveles o estados de energía (estados cuantizados).
- II. Correcta: Bohr postula que las órbitas circulares tienen energía específica y constante. El electrón no pierde ni gana energía, mientras se mueve en su misma órbita.
- III. Correcta:



Rpta.: I, II y III

4. El nivel de energía (E_1) (1.^{er} nivel) del modelo de Bohr es el más cercano al núcleo del átomo de hidrógeno y tiene un valor determinado de energía igual a $-313,6$ kcal/mol. Teniendo en cuenta el mismo orden que se enuncia. ¿A qué niveles de energía pertenecen los siguiente valores:

$-78,4$ kcal/mol; $-12,5$ kcal/mol; $-4,9$ kcal/mol?
(UNI 1981)

Resolución

La energía en un nivel n en un átomo de hidrógeno de Bohr está dada por la relación:

$$E_n = \frac{-313,6 \text{ kcal/mol}}{n^2}$$

- Si $E_n = -78,4$ kcal/mol
 $\Rightarrow -78,4 = \frac{-313,6}{n^2} \Rightarrow n = 2$
- Si $E_n = -12,5$ kcal/mol
 $\Rightarrow -12,5 = \frac{-313,6}{n^2} \Rightarrow n = 5$
- Si $E_n = -4,9$ kcal/mol
 $\Rightarrow -4,9 = \frac{-313,6}{n^2} \Rightarrow n = 8$

Rpta.: 2.^o nivel; 5.^o nivel; 8.^o nivel

5. El espectro de emisión del átomo de hidrógeno presenta una línea visible cuya longitud de onda es 434 nanómetros (nm), ¿cuál es el máximo nivel de energía involucrado en la emisión? (UNI 2005-1)

Datos: Constante de Rydberg: $R_H = 109678 \text{ cm}^{-1}$
 $1 \text{ nm} = 10^{-7} \text{ cm}$

Resolución

Línea visible: serie de Balmer

$$n_i = ? \rightarrow n_f = 2$$

$$\lambda = 434 \text{ nm} \left(\frac{10^{-7} \text{ cm}}{1 \text{ nm}} \right) = 434 \times 10^{-7} \text{ cm}$$

Según Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\frac{1}{434 \times 10^{-7}} = 109678 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$n_i = 5$$

Rpta.: 5



Helicopráctica

Nivel I

1. No está relacionada con la teoría atómica de John Dalton.
 - A) La materia está formada por partículas invisibles indivisibles e indestructibles.
 - B) Los átomos de un mismo elemento son idénticos entre sí.
 - C) Los átomos de diferentes elementos difieren entre sí, particularmente en el número atómico y demás propiedades.
 - D) La combinación de elementos se produce por unión de sus átomos, en una relación de números enteros simples.
 - E) Estableció definitivamente la atomicidad de la materia.

Resolución

2. Con respecto a los modelos atómicos de Thomson y Rutherford, ¿cuál de las siguientes proposiciones es incorrecta?
 - A) Thomson planteó que el átomo es una esfera de carga positiva en la cual se encontraban incrustados los electrones.
 - B) En el experimento de Rutherford, la mayoría de las partículas alfa atravesaban la lámina de oro y solo muy pocas se desviaban por repulsión eléctrica con el núcleo atómico.
 - C) Según Rutherford, el núcleo atómico es de volumen pequeño, pero de elevada densidad.
 - D) El modelo atómico de Rutherford está basada en la física clásica.
 - E) Según Rutherford, el átomo estaba constituido de un núcleo central positivo, alrededor la cual giraban los electrones en órbitas circulares definidas.

Resolución

3. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - a. El espectro de emisión se produce cuando los átomos son excitados a presión baja y voltajes elevados. ()
 - b. El espectro de emisión del átomo de hidrógeno se ha clasificado en series, como la de Lyman, Balmer, Paschen, etc. ()
 - c. Los espectros de absorción y de emisión indican que los átomos pueden absorber o emitir energía en cantidades discretas (fotones). ()

Resolución

4. Respecto al modelo atómico de Thomson, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - a. Plantea que el núcleo del átomo tiene carga eléctrica positiva y los electrones carga eléctrica negativa. ()
 - b. Se pudo concluir que los electrones de todas las sustancias son iguales. ()
 - c. Su modelo es el resultado de sus trabajos con rayos catódicos. ()

Resolución

Nivel II

5. ¿Cuál de las siguientes proposiciones no corresponde a una característica del átomo de Bohr?

- A) Se aplica a especies con un electrón.
- B) Las órbitas son circulares.
- C) En determinados radios, no se emite ni se absorbe energía.
- D) No se puede determinar simultáneamente la posición y la velocidad del electrón.
- E) Cuando el electrón pasa a una órbita menor, se emite energía.

Resolución

7. En la serie de Balmer del espectro de emisión del átomo de hidrógeno, una de las líneas de color rojo, siendo su longitud de onda 656,3 nm. Si se considera que el electrón salta desde niveles superiores desde $n=2$, ¿desde qué nivel cuántico habrá saltado el electrón para que produzca la línea roja del espectro?

Datos: $R_H = 109678 \text{ cm}^{-1}$; $1 \text{ cm} = 10^7 \text{ nm}$

Resolución

6. Respecto al modelo de Bohr, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- a. El modelo es válido para el átomo de hidrógeno y especies como ${}_2\text{He}^+$, ${}_3\text{Li}^{2+}$ y ${}_4\text{Be}^{3+}$, las cuales tienen 1 electrón. ()
- b. El menor radio en el modelo de Bohr es de 0,53 Å. ()
- c. El paso de un electrón de un nivel a otro, indicaba la absorción o emisión de un fotón o cuanto de energía. ()

Resolución

8. Si el electrón del átomo de hidrógeno se encuentra en una órbita cuyo radio según Bohr es 19,044 Å; ¿de qué órbita se trata?

Resolución

Nivel III

9. La segunda línea de la serie de Balmer tiene una longitud de onda en el vacío de 486,3 nm. Determine la energía de los fotones que corresponde a dicha línea, en joule.

Resolución

11. En el átomo de Bohr, determine la energía del fotón emitido cuando un electrón realiza una transición del tercer nivel ($n=4$) hacia el segundo nivel ($n=2$).

Resolución

10. Determine la energía, en kJ, absorbida para que sea posible la transición de una mol de electrones desde el nivel basal hasta el nivel 4.

Datos: $E_0 = 2,18 \times 10^{-18} \text{ J/e}^-$

$N_A = 6,02 \times 10^{23}$

Resolución

12. Determine la velocidad del electrón que posee al encontrarse en la tercera órbita del ion Li^{2+} .

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Respecto al modelo atómico de Dalton, marque la alternativa correcta.
 - A) El átomo está constituido por un núcleo y electrones.
 - B) El núcleo del átomo concentra más del 99 % de masa del átomo.
 - C) El átomo es una partícula diminuta e indestructible en reacciones químicas.
 - D) Los átomos de todas las sustancias son iguales en masa y tamaño. Son diferentes en la forma de reaccionar con otros átomos.
 - E) Los electrones en el átomo se hallan en orbitales.

Resolución

3. Respecto al modelo atómico de Rutherford, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - El átomo está constituido por protones, neutrones y electrones. ()
 - Los electrones giran alrededor de un núcleo de alta densidad másica. ()
 - Rutherford plantea su modelo después de bombardear láminas muy delgadas de oro, con rayos catódicos. ()

Resolución

Nivel II

2. Escriba verdadero (V) o falso (F) según Thomson.
 - a. El átomo es eléctricamente nulo. ()
 - b. Determinó la relación e/m del electrón. ()
 - c. Su modelo se basó en el estudio de los rayos catódicos. ()
4. Con respecto al modelo atómico de Bohr, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
 - a. Explica las restricciones del modelo de Rutherford. ()
 - b. Aplica la teoría cuántica de Max Planck. ()
 - c. Los modelos de Bohr y Rutherford coinciden en cuanto a que explican cómo se originan los enlaces. ()

Resolución**Resolución**

Nivel III

5. El electrón del átomo de hidrógeno se encuentra en una órbita cuya energía es de $-0,54$ eV. ¿De qué órbita se trata?

Resolución

7. ¿Cuánta energía se emite o libera cuando un electrón del átomo de hidrógeno sufre un salto desde la segunda hasta la cuarta órbita?

Resolución

6. Determine la energía del fotón emitido cuando un electrón realiza una transición del tercer nivel ($n=3$) hacia el nivel basal ($n=1$) del átomo de Bohr.

Resolución

8. ¿Qué energía le corresponde al electrón, en la tercera órbita en el ion Li^{2+} ?

Resolución



Test 1

Nivel I

1. Marque la alternativa que no se relaciona con la teoría atómica de Dalton y el modelo atómico de Thomson.
- A) El carácter indivisible del átomo fue planteado por Dalton.
 - B) Thomson plantea que al átomo tiene carga positiva y los electrones están presentes como las pasas en el budín.
 - C) Dalton toma en cuenta la naturaleza eléctrica positiva y negativa del átomo.
 - D) Thomson no plantea el modelo nuclear del átomo.
 - E) La relación específica carga eléctrica sobre masa del electrón fue descubierta por Thomson.

2. Al realizar experimentos que lo llevaron a formular su modelo atómico, es incorrecto decir que Rutherford:
- I. Bombardeó láminas de oro con rayos β .
 - II. Observó que la mayoría de las partículas alfa rebotaban en la lámina metálica.
 - III. Determinó que la mayor parte del átomo era un espacio vacío.
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) I y II
 - E) I, II y III

Nivel II

3. Con respecto a las limitaciones de la teoría atómica y de los modelos atómicos previos al modelo atómico moderno, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.
- La teoría atómica de Dalton considera la existencia de los isótopos. ()
 - El modelo de Thomson suponía igual al número de protones y neutrones, estas se distribuían en toda la extensión del átomo. ()
 - El modelo de Rutherford estableció que el átomo es "nuclear" pero no pudo explicar su estabilidad, en relación a la emisión continua de energía, que suponía el modelo. ()
- A) VVV
 - B) VVF
 - C) VFF
 - D) VFV
 - E) FFV

4. De acuerdo al modelo de Bohr, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.

- El modelo de Bohr acepta el planteamiento de Rutherford de la existencia del núcleo atómico. ()
- El modelo de Bohr logra explicar los espectros atómicos del átomo de hidrógeno. ()
- Según el modelo de Bohr, la energía del electrón está determinada por el nivel que ocupa. ()

- A) FFF
- B) FFV
- C) FVV
- D) VFV
- E) VVV

Nivel III

5. Respecto al modelo atómico de Bohr, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.

- El modelo de Bohr explica el espectro atómico del hidrógeno y especies hidrogenoides. ()
- Según Bohr, la energía que posee un electrón está determinada al nivel de energía al que pertenece. ()
- El átomo solo puede ganar o perder energía cuando se realizan transiciones electrónicas entre niveles de energía. ()

- A) VFV
- B) VVV
- C) VVF
- D) FVV
- E) FFV



Test 2

Nivel I

1. Según el experimento de Ernest Rutherford, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.

- A través de la experiencia de las partículas alfa, provenientes de un núcleo radiactivo bombardea una laminilla de oro. ()
- Más del 90 % de las partículas alfa se desvían en diferentes ángulos al atravesar la laminilla de oro. ()
- En su modelo nuclear, el electrón tiene menos dinámica que en el modelo de Thomson. ()

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) VFF

2. Respecto a los modelos atómicos, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.

- Según Dalton, los átomos no pierden su identidad en las reacciones químicas. ()
- Thomson, al estudiar los rayos catódicos, descubrió a los electrones y planteó un modelo nucleado del átomo. ()
- Rutherford con su experimento de dispersión de rayos beta comprobó que el átomo es en gran parte espacio vacío. ()

- A) VVV B) VFF C) FFV
D) FFF E) VFV

Nivel II

3. ¿Cuál de las siguientes transiciones del electrón, entre niveles cuánticos de energía, produce la tercera línea de la serie de Balmer?

- A) $n_i=4$ $n_f=2$
B) $n_i=4$ $n_f=1$
C) $n_i=5$ $n_f=3$
D) $n_i=3$ $n_f=2$
E) $n_i=5$ $n_f=2$

4. Considerando que un mol de átomos $6,02 \times 10^{23}$ átomos de H. ¿Qué cantidad de energía será necesaria, en kJ, para ionizar un mol de átomos de hidrógeno, desde su estado basal?

Dato: $E_0 = 2,18 \times 10^{-18} \frac{\text{J}}{\text{e}^-}$ (Energía de ionización del electrón del átomo de H)

- A) 1,3124 B) 13,124 C) 131,24
D) 1312,4 E) 13 124

Nivel III

5. Considerando válido el modelo atómico de Bohr; determine la longitud de onda (en Å) asociada a un electrón del átomo de hidrógeno, en función del radio de Bohr (a_0) cuando se encuentra el tercer nivel estacionario de energía.

Dato: Radio de Bohr (a_0) = $0,53 \text{ Å}$

- A) $2\pi a_0$ B) $3\pi a_0$ C) $4\pi a_0$
D) $5\pi a_0$ E) $6\pi a_0$



Helicodesafío

- Escriba verdadero (V) o falso (F) de cada proposición para el modelo de Bohr, luego marque la alternativa correcta.

 - El modelo de Bohr permite explicar el espectro de líneas del átomo de hidrógeno, el cual contiene a las regiones: UV, visible e IR. ()
 - Los niveles energéticos cuantizados permitidos del electrón en el nivel $n=5$, se expresa en el valor del momento angular, cuyo valor es $5,273 \times 10^{-34}$ J.s. ()
 - En la emisión de luz violeta, la distancia entre las órbitas involucradas es $21a_0$ (a_0 = radio de Bohr = $0,53$ Å). ()

Datos: $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s; $\pi = 3,1416$

A) VVV B) VVF C) VVF
D) FVV E) FVF
- ¿Cuál es la longitud de onda mínima y máxima para la serie de líneas espectrales de Balmer? Dé la respuesta en nm.

Datos:

$R_H = 109\,678 \text{ cm}^{-1}$; $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

A) 468,5; 721,8 B) 381,2; 736,5
C) 468,7; 786,2 D) 364,7; 656,5
E) 348,2; 695,2
- En un átomo de hidrógeno, la energía de un nivel es $-1,363 \times 10^{-19}$ J. Para llegar a ese nivel un electrón salta desde un nivel n_0 absorbiendo la energía de un fotón de 97,5 nm. ¿Cuál es la longitud de onda (en Å) asociada al electrón cuando se encuentra en el nivel n_0 ?

Datos:

$E_0 = A = 2,8 \times 10^{-18} \text{ J}$
 $R_H = 109\,678 \text{ cm}^{-1}$
 $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
 $1 \text{ cm} = 10^7 \text{ nm}$
 a_0 : Radio de Bohr

A) $2\pi a_0$ B) $6\pi a_0$ C) $8\pi a_0$
D) $16\pi a_0$ E) $24\pi a_0$
- En una serie correspondiente al espectro de emisión del átomo de hidrógeno, una de las líneas tiene una longitud de onda 1282,17 nm. Si esta línea corresponde a la serie de Paschen, ¿desde qué nivel de energía habrá saltado el electrón para que se produzca esta línea del espectro?

Datos: $1 \text{ cm} = 10^8 \text{ Å}$
 $R_H = 109\,677 \text{ cm}^{-1}$

A) Primera línea de Paschen
B) Segunda línea de Paschen
C) Tercera línea de Paschen
D) Cuarta línea de Paschen
E) Quinta línea de Paschen
- Los electrones emiten 22,3 kcal/mol en un proceso de desexcitación. Considerando el modelo de Bohr, ¿a qué nivel energético descendió si se encontraba en una órbita de radio 13,229 Å?

Datos: $a_0 = 0,529 \text{ Å}$
 $A = 313,6 \text{ kcal/mol}$

A) Primera línea de Lyman
B) Tercera línea de Balmer
C) Segunda línea de Paschen
D) Primera línea de Brackett
E) Quinta línea de Lyman

ESTRUCTURA ATÓMICA



Objetivos

- Determina el número atómico y el número de masa de un átomo y de un ion monoatómico.
- Diferencia los isótopos, isóbaros e isótonos.
- Explica los fenómenos nucleares y las transmutaciones nucleares.



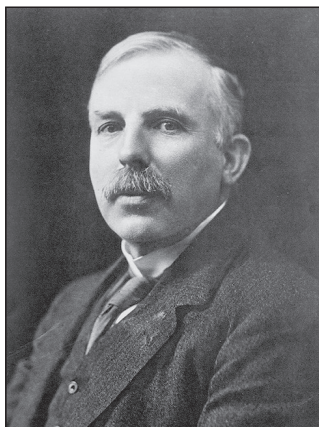
Curiosidades

Lectura

El átomo es un sistema energético eléctricamente neutro y dinámico, es la mínima parte de un elemento químico la cual mantiene aún sus propiedades químicas. Su **estructura** muestra una parte interna llamada núcleo atómico y una parte externa conocida como **envoltura electrónica**, **nube electrónica** o zona extranuclear. El **núcleo** atómico es diez mil veces más pequeño que el átomo, tiene alta densidad, contiene casi toda la masa **atómica** y refugia (a los **nucleones**), al **protón** (descubierto por Ernest **Rutherford**), al **neutrón** (descubierto por James **Chadwick**) y otras **partículas subatómicas**; la zona extranuclear, tiene un gran volumen, baja densidad y contiene al **electrón** (descubierto por J. J. **Thomson**). Cuando los átomos pierden electrones se transforman en **iones** positivos o **cationes (oxidación)**; cuando ganan electrones se reducen transformándose en iones negativos o **aniones (reducción)**. Los **isótopos** tienen igual número atómico, los **isóbaros** igual número de masa, los **isoelectrónicos** igual configuración electrónica y los **isótonos** igual número de neutrones. Algunas partículas subatómicas como los protones y neutrones están formadas por **cuarks**.

Actividad

De acuerdo a la lectura, busque las palabras en negrita en el pupiletras de la siguiente página



Ernest Rutherford



Pupiletras

K S K R A U C Q O E L C U N Ñ C U P P Z
 C O X I D A C I O N U J N H C R P B Ñ S
 I R E Q M I Ñ B L A R U T L O V N E K A
 W A R U T C U R T S E M D C P Ñ L N V C
 D B M Q M Y P N G C A U Q S D G P T M I
 A O Ñ X O O X S N Ñ Z J V R M Y B D V M
 H S S O C I N O R T C E L E O S I Z K O
 C I O O C Q Q J V K E N U R G A M K Y T
 P Q N S U M Z D L D X Y U M C C G R E A
 D Q U X A V R H A V Ñ T K B G I M E S B
 W Ñ C E P L P E A C H Z S R W M R S E U
 E N L R I Q U X D E I O M S P O J O N S
 S O E C Z O T C R U N N E E A T J P O E
 Y T O M S Y N F I O C N O C S A Ñ O I B
 M O N K O T O E T T O C O R J R A T N U
 A R E R G R G O S I R N I R T P A O A N
 R P S D D W S N T Y H A O O T C Ñ S L Q
 B U E O C I E A Q P M B P V N U E I R M
 C D X G K H C L E B I Y H Z Q A E L G Z
 R V I E L E C T R O N O S M O H T N E Q



ESTRUCTURA ATÓMICA

1. **Átomo.** (1932 - Paul Dirac-Ernest Jordan) El átomo es un sistema energético eléctricamente neutro y dinámico. El modelo actual es probabilístico y contiene más de 230 partículas subatómicas.

El átomo es la mínima porción de materia que conserva las propiedades de un elemento químico. Hoy día, sabemos que los átomos no son, como creía Demócrito, indivisibles. De hecho, están formados por partículas subatómicas fundamentales. Estas partículas son:

- Electrón:** Descubierto en 1897 por el físico inglés J. J. Thomson (1856 - 1940). Los electrones son partículas con carga eléctrica negativa que dan origen a la electricidad cuando fluyen en un conductor. El electrón pertenece a la familia de los leptones.
- Neutrón:** Se encuentra normalmente, en los núcleos atómicos como el protón. El neutrón no tiene carga eléctrica, está hecho de tres cuarks y no es una partícula estable en general. Cuando se encuentra libre, fuera del núcleo, esta decae en un protón, una partícula beta y un neutrino. Fue descubierto por el físico inglés James Chadwick en 1932. La masa del neutrón es ligeramente mayor que la del protón.
- Protón:** Es una partícula de carga eléctrica igual a la de un electrón pero positiva y con una masa 1836 veces mayor a la del electrón. Un protón está formado por tres cuarks y se encuentra normalmente dentro de los núcleos atómicos. En ambientes de muy alta energía como en el Sol, los protones se encuentran libres.

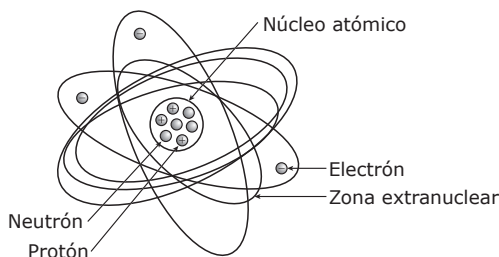
Partículas subatómicas fundamentales

Partícula	Electrón	Protón	Neutrón
Notación	e^{-} , ${}^0_{-1}e$, β^{-}	p^{+} , ${}^1_{+1}H$	n^0 , 1_0n
Masa absoluta	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	$1,67252 \times 10^{-27}$ kg	$1,67482 \times 10^{-27}$ kg
Masa relativa	0,0005 u	1,005 u	1,007 u
Carga absoluta	$-1,602 \times 10^{-19}$ C	$+1,602 \times 10^{-19}$ C	0
Carga relativa	-1	+1	0
Estabilidad	Muy alta	Muy alta	Inestable fuera del núcleo
Vida media	10^{31} años	10^{22} años	1000 s o 16,6 min
Composición (en cuarks)	No tiene cuarks.	2 up y 1 down	1 up y 2 down
Lo descubrió	Thomson (1897)	Rutherford (1919)	Chadwick (1932)

Observación

- Respecto a las masas $m_{n^0} > m_{p^+} \gg m_{e^{-}}$

$$m_{n^0} \sim m_{p^+}$$
- A los protones, neutrones y electrones se les denominan partículas subatómicas fundamentales, debido a que en cualquier tipo de materia son los mismos e indistinguibles unos de otros.



2. **Núclido:** El término núclido se usa para referirse a las diferentes formas atómicas de un elemento químico formado por un solo núcleo. Esta representación brinda información de la composición de un isótopo específico.



E: símbolo del elemento químico

Z: número atómico

A: número de masa

Número atómico (Z): Denota la carga nuclear de los núclidos. Es decir, el número de protones contenidos en el núcleo atómico. Este número determina la identidad química de un elemento y permite ubicar a los elementos en la tabla periódica.

$$Z = N.^\circ p^+$$

Si el átomo es eléctricamente neutro:

$$N.^\circ p^+ = N.^\circ e^-$$

Número de masa (A): Determina el número de nucleones. Es decir, la suma del número de protones y el número de neutrones contenidos en el núcleo de un átomo.

$$A = N.^\circ p^+ + N.^\circ n^0 \Rightarrow A = Z + N.^\circ n^0 \Rightarrow N.^\circ n^0 = A - Z$$

3. **Ion:** Es toda especie química con carga eléctrica. Un catión monoatómico es un átomo cargado positivamente. Esta condición se da cuando un átomo neutro pierde electrones (se oxida).



${}_{11}^{23}\text{Na}^{1+}$: Catión monovalente

$$N.^\circ p^+ = 11$$

$$N.^\circ e^- = 11 - 1 = 10$$

$$N.^\circ n^0 = 23 - 11 = 12$$

$$N.^\circ e^- = Z \pm q$$

Un anión monoatómico es un átomo cargado negativamente. Esta condición se da cuando un átomo neutro gana electrones (se reduce).

${}_{17}^{35}\text{Cl}^{1-}$: Anión monovalente

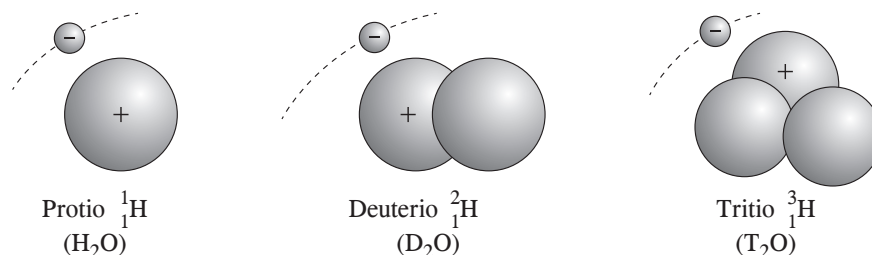
$$N.^\circ p^+ = 17$$

$$N.^\circ e^- = 17 + 1 = 18$$

$$N.^\circ n^0 = 35 - 17 = 18$$

4. **Interrelación de átomos**

Isótopos o hílidos: Los átomos del mismo elemento pueden tener diferente número de neutrones; los diferentes átomos de cada elemento son llamadas isótopos. Por ejemplo, el isótopo más común del hidrógeno (el protio) no tiene ningún neutrón; también hay un isótopo del hidrógeno llamado deuterio, con un neutrón, y otro, tritio, con dos neutrones.



Los isótopos son átomos con igual número atómico, pero con diferente número de masa. Tienen propiedades químicas semejantes, pero diferentes propiedades físicas.

¿Puede un átomo tener cualquier cantidad de neutrones?

No; hay combinaciones preferidas de neutrones y protones, en las cuales las fuerzas que mantienen la cohesión del núcleo parecen balancearse mejor. Los elementos ligeros tienden a tener tantos neutrones como protones; los elementos pesados aparentemente necesitan más neutrones que protones para mantener la cohesión. Los átomos con algunos neutrones en exceso o no los suficientes, pueden existir durante algún tiempo; pero son inestables.

Los isótopos más comunes son los isótopos del hidrógeno:

Nombre	Protio	Deuterio	Tritio
	${}^1_1\text{H} < > \text{H}$	${}^2_1\text{H} < > \text{D}$	${}^3_1\text{H} < > \text{T}$
Z	1	1	1
N.º e^-	1	1	1
N.º n^0	0	1	2
A	1	2	3
Masa (en u)	1,007825	2,0140	3,01605
Abundancia	99,98 %	0,018 %	0,002 %

Isóbaros: Son átomos de elementos diferentes con el mismo número de masa. Sus propiedades físicas y químicas son diferentes.

	${}^{40}_{18}\text{Ar}$	${}^{40}_{19}\text{K}$	${}^{40}_{20}\text{Ca}$
Z	18	19	20
N.º n^0	22	21	20
A	40	40	40

Isótonos: Son átomos de elementos diferentes con el mismo número de neutrones. Sus propiedades físicas y químicas son diferentes.

	${}^{55}_{25}\text{Mn}$	${}^{56}_{26}\text{Fe}$
Z	25	26
N.º n^0	30	30
A	55	56

Especies isoelectrónicas: Son especies con la misma configuración electrónica y por consiguiente, con el mismo número de electrones.



5. Acerca de las partículas elementales

Las ideas básicas son:

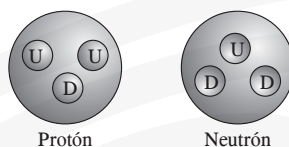
Partículas portadoras de fuerza: Cada tipo de fuerza fundamental es transportada por una partícula portadora de fuerza. Ejemplo: El fotón.

Partículas materiales: El modelo estándar establece que la mayoría de las partículas de las cuales tenemos conocimiento están compuestas en realidad de partículas más fundamentales llamadas cuarks. Hay otra clase de partículas fundamentales llamadas leptones (el electrón es un ejemplo).

Lo que hace que el modelo estándar sea tan amplio es el hecho que todas las partículas observadas pueden ser explicadas con:

- 6 tipos de leptones
- 6 tipos de cuarks
- 4 partículas portadoras de fuerza

Cuarks	Leptones	Fuerza	Partícula portadora
U (Up)	Electrón,	Electromagnética	Fotón
D (Down)	Neutrino, etc.	Nuclear fuerte	Gluon
S (Strange)		Nuclear débil	Bosones: W, Z
C (Charm)		Gravedad	Gravitón
B (Bottom)			
T (Top)			

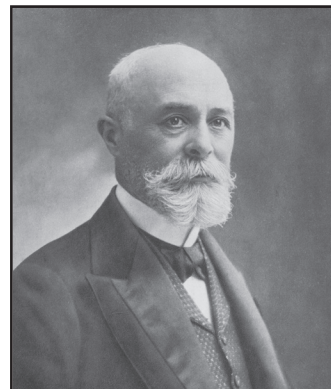


Los leptones pueden existir sin necesidad de la compañía de otras partículas. Los cuarks, en cambio, solo se encuentran en grupos. Hasta este momento, no hay evidencias de que los leptones tengan alguna estructura interna o tamaño.

QUÍMICA NUCLEAR

- La radiactividad:** Las reacciones químicas tradicionales ocurren como resultado de la interacción entre los electrones de valencia alrededor del núcleo del átomo. Las reacciones nucleares implican trasmutaciones de los núcleos atómicos debido a que no existe una relación ideal neutrón/protón. El descubrimiento de la radiactividad se debe al físico francés Henri Becquerel, al comprobar casualmente en 1896 como quedaba impresa una placa fotográfica en la que se habían colocado cristales de uranio y potasio, aun sin la intervención de la luz solar.

La radiactividad supone que las sustancias llamadas radiactivas emiten espontáneamente radiaciones capaces de atravesar la materia, impresionar placas fotográficas o producir ionización o fluorescencia. Poco después del descubrimiento de Becquerel, Marie Sklodowska (Marie Curie) empezó a estudiar la radiactividad y completó en gran medida el primer trabajo sobre cambios nucleares. Curie descubrió que la radiación era proporcional a la cantidad de elementos radiactivos presentes, y propuso que la radiación era una propiedad de los átomos (al contrario a una propiedad química de un compuesto). Marie Curie fue la primera mujer en ganar el premio Nobel y la primera persona en ganar dos (el primero, compartido con su esposo Pierre y con Becquerel por descubrir la radiactividad; y el segundo por descubrir los elementos radiactivos radio y polonio).

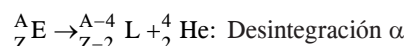


Henri Becquerel

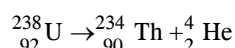
2. La radiación nuclear: Los procesos nucleares naturales emiten tres clases de radiaciones principalmente:

- a. **Partículas α :** Son núcleos de helio, compuestos por 2 neutrones y 2 protones. Tienen carga eléctrica positiva y se desvían poco al pasar a través de un campo eléctrico o magnético, son emitidos desde el núcleo a una velocidad entre 10000 y 30000 km/s.

Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula alfa, su número atómico Z disminuye en 2 unidades, y su número de masa en 4 unidades. El nuevo núcleo corresponde a otro elemento químico y el proceso se denomina transmutación.

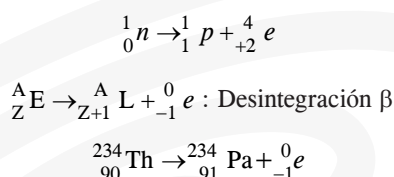


Por ejemplo: Cuando un núcleo de uranio 238 ($Z=92$) emite una partícula alfa, el núcleo hijo es torio-234 ($Z=90$).

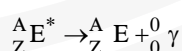


- b. **Partículas β :** Son partículas de naturaleza semejante a los electrones, emitidos desde el núcleo a velocidades comprendidas entre 100000 y 200000 km/s, que se desvían fácilmente ante un campo eléctrico o magnético.

Cuando un núcleo emite una partícula β , su número atómico aumenta en 1 unidad, pero el número de masa no varía. Así, cuando Th-234 ($Z=90$) emite una partícula β , resulta Pa-234 ($Z=91$).



- c. **Rayos γ :** Son fotones de gran energía. No se trata de partículas, sino de ondas electromagnéticas, como los rayos X o la luz, pero su energía es mucho mayor que esta debido a tener una longitud de onda mucho menor. Ninguna partícula es emitida durante la emisión gamma y, por consiguiente, la radiación gamma no causa en sí misma la transmutación de los átomos. Sin embargo, la radiación γ es emitida, generalmente, durante la desintegración α o β .



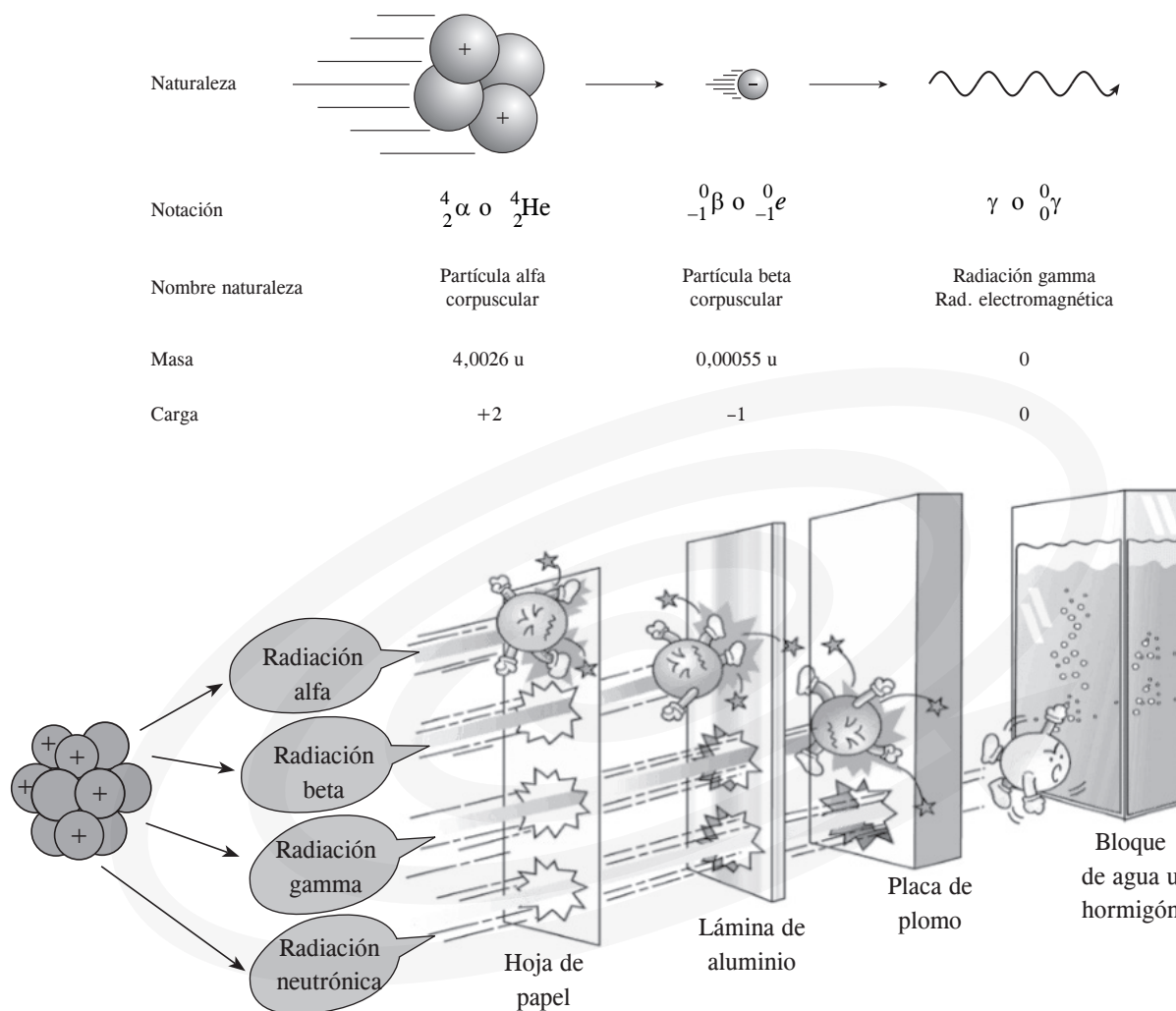
Anotación

En toda reacción nuclear se cumplen dos leyes fundamentales:

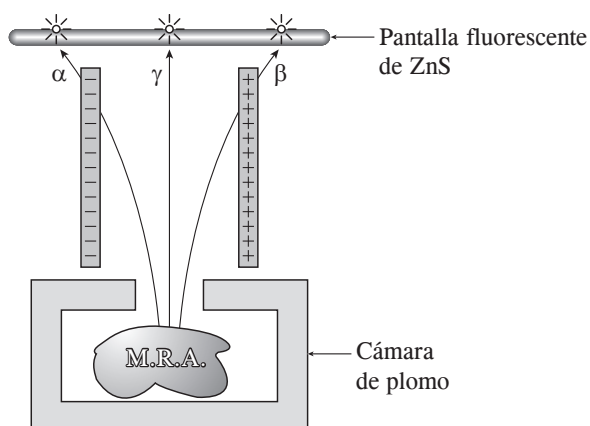
1. La carga total del núcleo se conserva o permanece constante durante una reacción nuclear. Esto significa que la suma de los subíndices (número de cargas eléctricas en los núcleos) para los productos, debe ser igual a la suma de los subíndices para los reactivos.
2. De manera similar, el número total de nucleones (protones y neutrones) se conserva o permanece constante durante una reacción nuclear. Esto significa, que la suma de los superíndices (números de masa) para los productos, debe ser igual a la suma de los superíndices para los reactivos.

3. **Poder de penetración de la radiación:** Las partículas radiactivas tienen diferente poder de penetración en la materia. Así, y tomando como referencia una placa de aluminio, tenemos:

- **Partículas α :** No son capaces de atravesar la lámina de aluminio de 0,0005 cm de espesor. Son absorbidos por una hoja de papel o la piel del hombre, que no logran atravesar.
- **Partículas β :** No son capaces de atravesar la lámina de aluminio de 0,005 cm de espesor. Son absorbidos por el tejido muscular.
- **Rayos γ :** No son capaces de atravesar la lámina de aluminio de 8 cm. de espesor. Son los más peligrosos en toda reacción nuclear.



Relaciones importantes entre los partículas radiactivas

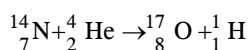


Velocidad	$\alpha < \beta < \gamma$
Poder de penetración	$\alpha < \beta < \gamma$
Poder de ionización	$\alpha > \beta > \gamma$
Masa	$\alpha > \beta > \gamma$
Peligrosidad	$\alpha < \beta < \gamma$

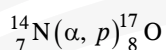
4. **La radiactividad artificial:** Uno de los experimentos que realizaron los esposos Joliot-Curie en esa época consistió en utilizar su fuente de polonio, elemento emisor de partículas alfa. Bombardearon con partículas alfa una lámina delgada de aluminio y, para determinar la interacción de estas partículas con el aluminio, midieron la forma en que variaba la intensidad de la radiación en el otro lado de la hoja de aluminio. Su sorpresa fue grande cuando encontraron que aún después de interrumpir el bombardeo, la placa de aluminio seguía emitiendo radiación; se dieron cuenta, además, de que la intensidad de la radiación emitida por la placa de aluminio disminuía siguiendo la ley del decaimiento radiactivo encontrada por Rutherford y Soddy, y que la vida media de este material radiactivo era muy corta. ¿Qué era lo que estaban observando? Los Joliot-Curie habían descubierto que la radiactividad se puede producir artificialmente. En realidad, en este experimento habían encontrado una pieza más del rompecabezas del panorama nuclear. Descubrieron que partiendo del aluminio, que tiene 13 protones y 14 neutrones, terminaron con fósforo-30 (15 protones y 15 neutrones).

Así fue como el fenómeno misterioso, que Pierre y Marie Curie habían observado sin poderlo modificar, fue producido artificialmente por su hija y su yerno por medio de una reacción nuclear en la que el núcleo de un átomo había interactuado con una partícula alfa. La Academia de Ciencias de Suecia dio el premio Nobel de Química a Frédéric e Irene Joliot-Curie por sus trabajos sobre la síntesis de elementos radiactivos, siendo este el tercer premio Nobel concedido a la familia.

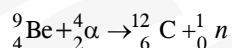
- La primera transmutación nuclear la realizó E. Rutherford, en 1919.



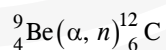
Ecuación nuclear simplificada:



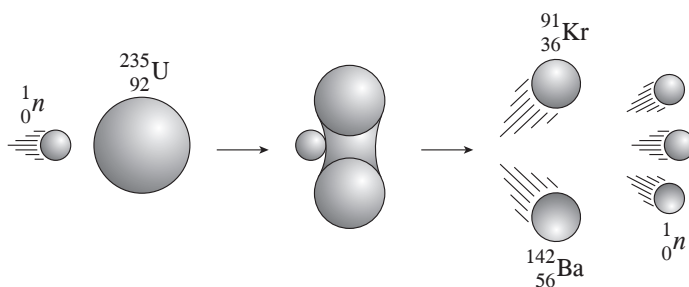
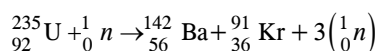
- En 1932, J. Chadwick descubrió el neutrón bombardeando núcleos de Berilio:



Ecuación nuclear simplificada:



5. **Diferencia entre fisión y fusión:** Por la fisión nuclear, un núcleo pesado como el uranio 235, es dividido generalmente en dos núcleos más ligeros debido a la colisión de un neutrón (recordemos que un átomo se compone básicamente de electrones, protones y neutrones). Como el neutrón no tiene carga eléctrica, es absorbido por el núcleo del uranio. Al fisionarse este, libera más neutrones, que colisionan con otros átomos de uranio creando la conocida reacción en cadena, de gran poder radiactivo y energético. Esta reacción se produce a un ritmo muy acelerado en las bombas nucleares; pero es controlado para usos pacíficos. En la actualidad, se conocen dos núclidos fisionables: ${}^{235}\text{U}$ y ${}^{239}\text{Pu}$.

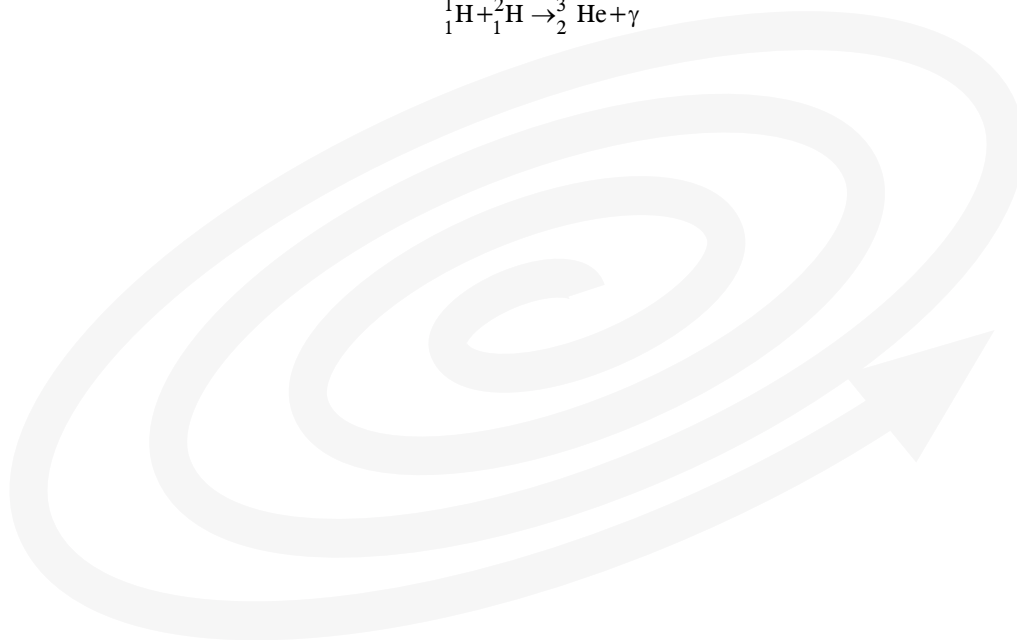
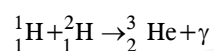
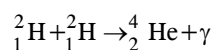
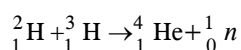


Por el contrario, la fusión nuclear es una reacción en la que se unen dos núcleos ligeros para formar uno más pesado. Este proceso desprende energía porque la masa del núcleo pesado es menor que la suma de los pesos de los núcleos más ligeros.

Este defecto de masa se transforma en energía, se relaciona mediante la fórmula $E = m \cdot c^2$, aunque el defecto de masa es muy pequeño y la ganancia por átomo es muy pequeña, se ha de tener en cuenta que es una energía muy concentrada, en un gramo de materia hay millones de átomos, con lo que poca cantidad de combustible da mucha energía.

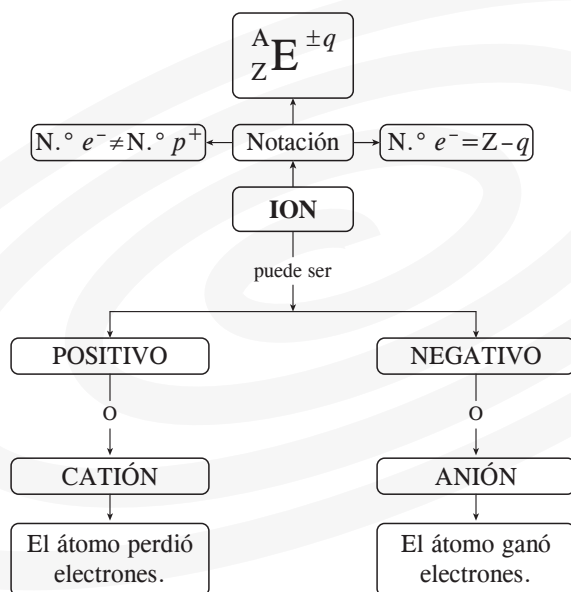
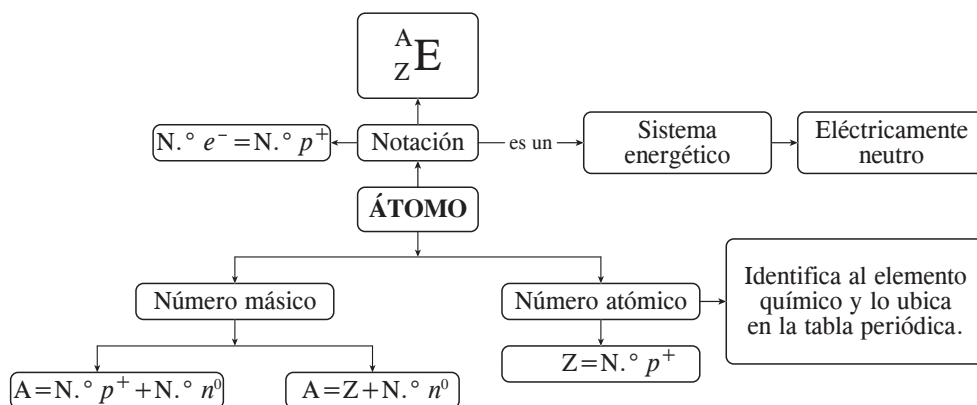
No todas las reacciones de fusión producen la misma energía, depende siempre de los núcleos que se unen y de los productos de la reacción. La reacción más fácil de conseguir es la del deuterio (un protón más un neutrón) y tritio (un protón y dos neutrones) para formar helio (dos neutrones y dos protones) y un neutrón, liberando una energía de 17,6 MeV.

Es una fuente de energía prácticamente inagotable, ya que el deuterio se encuentra en el agua de mar y el tritio es fácil de producir. Son ejemplos de reacciones de fusión nuclear:

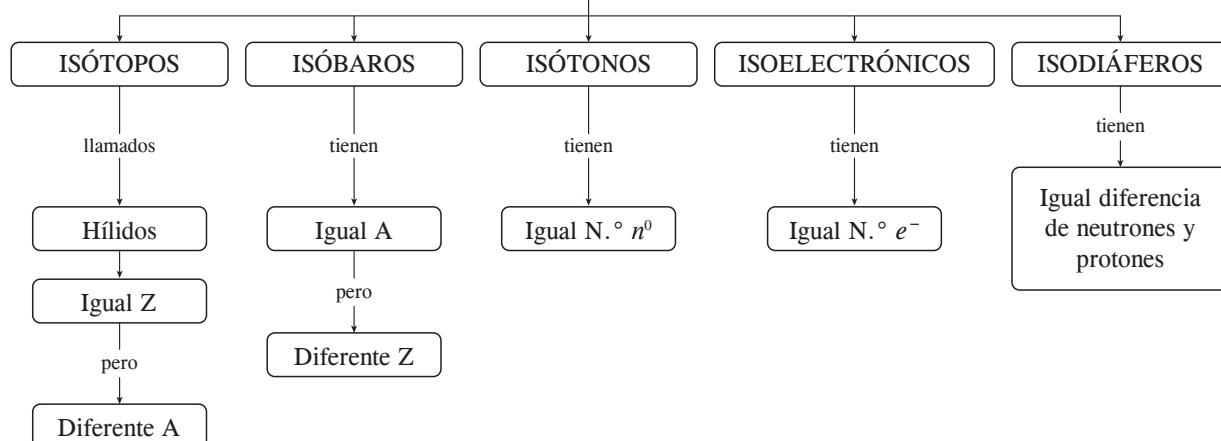


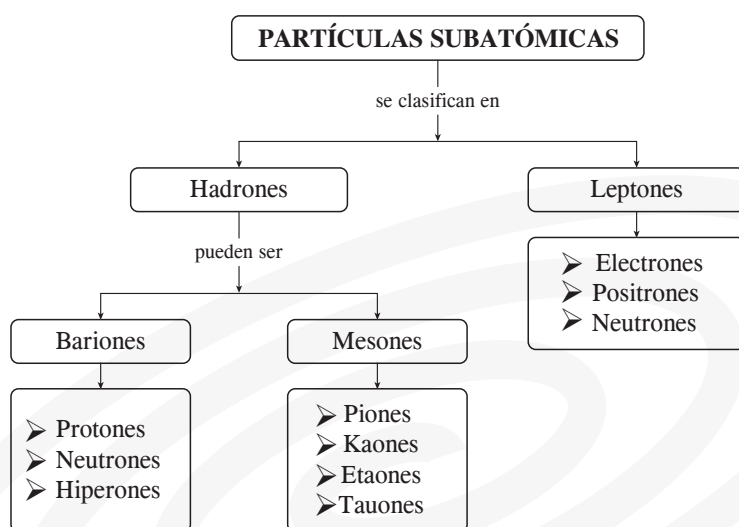
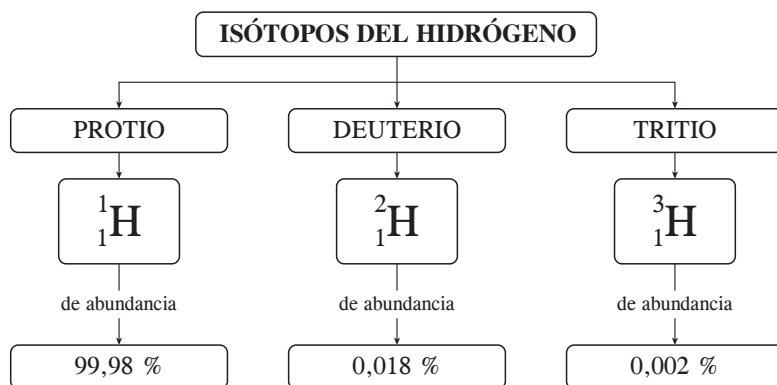


ESTRUCTURA ATÓMICA



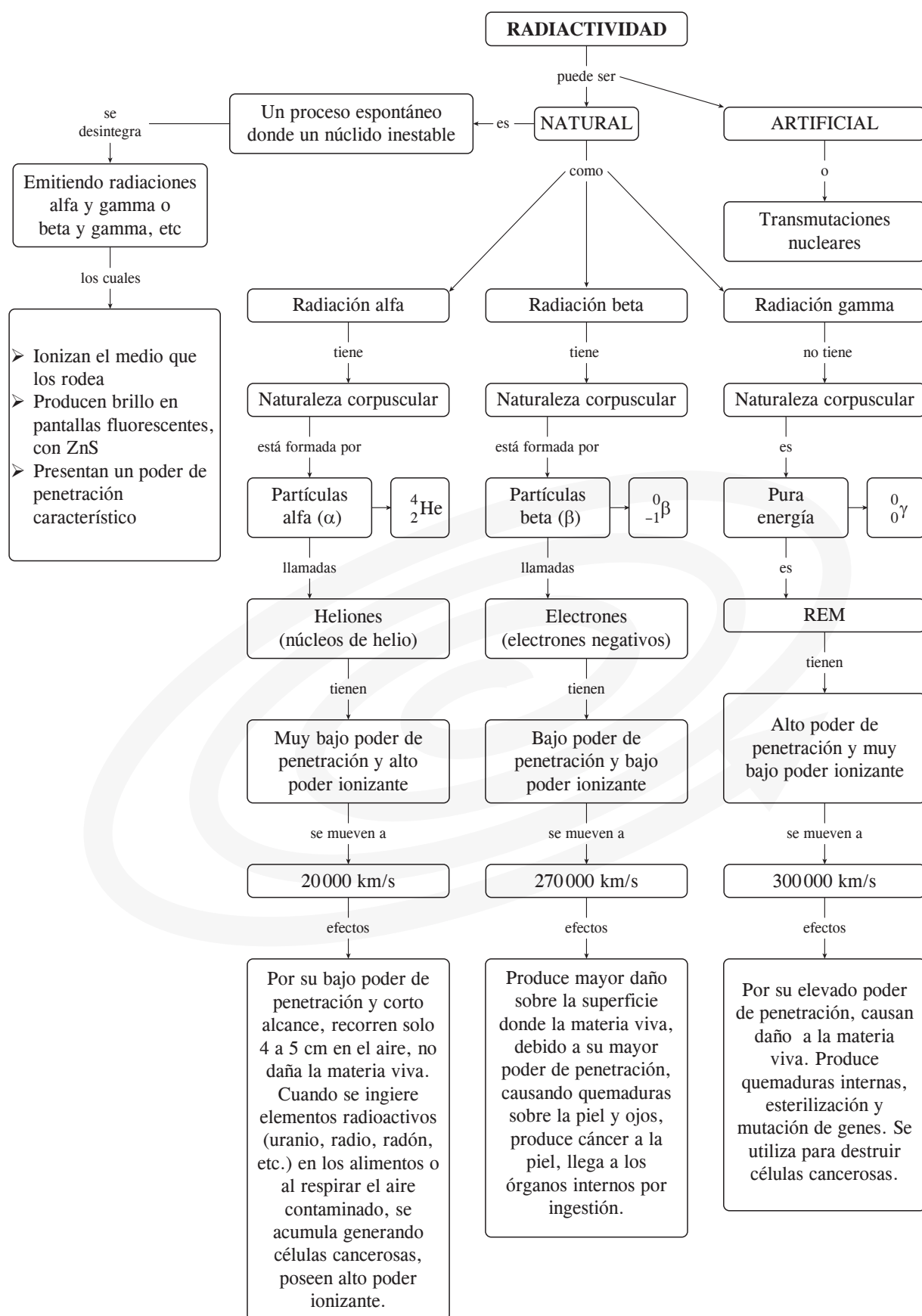
ÁTOMOS ESPECIALES

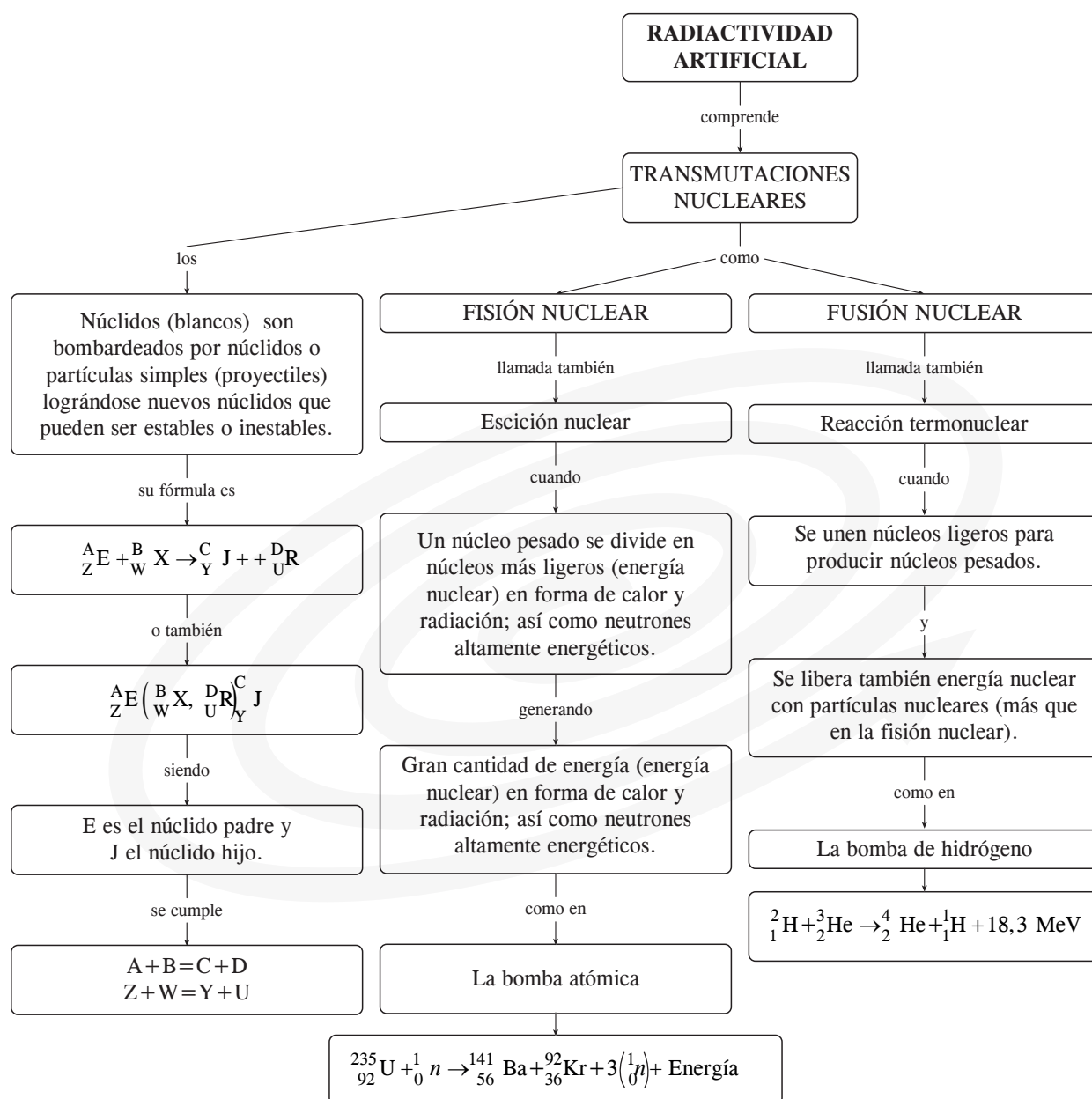




PARTÍCULAS FUNDAMENTALES

PARTÍCULA FUNDAMENTAL	LO DESCUBRIÓ	MASA ABSOLUTA	CARGA ABSOLUTA	NOTACIÓN
Neutrón	Chadwick	$1,67482 \times 10^{-24} \text{ g}$	0	1_0n
Protón	Rutherford	$1,67252 \times 10^{-24} \text{ g}$	$+1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	${}^1_{+1}p$
Electrón	Thomson	$9,1 \times 10^{-28} \text{ g}$	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	${}^{-1}_{-1}e$







Problemas resueltos

1. En relación a las partículas subatómicas, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda. (UNI 1983-2)

- Los protones y neutrones están presentes en el núcleo atómico ()
- Los protones y neutrones tienen la misma masa. ()
- Un haz de neutrones es desviado por un campo eléctrico. ()

Resolución

- I. Verdadero: Los protones y los neutrones son partículas fundamentales que se encuentran en el núcleo atómico (nucleones fundamentales).

- II. Falso:

$$m_{n^0} > m_{p^+} > m_{e^-}$$

- III. Falsa: Los neutrones no poseen carga eléctrica por lo tanto no son desviados por los campos eléctricos ($q_{n^0}=0$)

Rpta.: VFF

2. El átomo de Cu neutro contiene 29 protones y 29 electrones. Cuando este átomo pasa a formar el Cu^{2+} , ¿qué ha variado? (UNI 1983-2)

- A) Aumenta sus protones a 31.
- B) Se queda con 29 electrones y 27 protones.
- C) Los protones se han quedado iguales, pero pierde electrones.
- D) Los protones se quedan en 29, pero gana dos electrones.
- E) El cambio no está relacionado, ni con protones, ni con electrones, sino con los neutrones.

Resolución

$$N.^{\circ} p^+ = 29$$

$$N.^{\circ} e^- = 29$$



Pierde $2e^-$ como catión Cu^{2+} posee $27e^-$ y el número de protones no varía.

Rpta.: Los protones se han quedado iguales, pero pierde electrones.

3. De las siguientes especies todas son isoelectrónicas, menos una, ¿cuál es? O^{2-} , F^- , Ne, Na, Mg^{2+} . (UNI- 1995-2)

	O	F	Ne	Na	Mg
Z	8	9	10	11	12

Resolución

Las especies isoelectrónicas tiene igual número de electrones e igual distribución electrónica.

A) ${}_8\text{O}^{2-}$ $N.^{\circ} e^- = 10$

B) ${}_9\text{F}^-$ $N.^{\circ} e^- = 10$

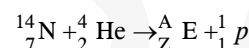
C) ${}_{10}\text{Ne}$ $N.^{\circ} e^- = 10$

D) ${}_{12}\text{Mg}^{2+}$ $N.^{\circ} e^- = 10$

C) ${}_{11}\text{Na}$ $N.^{\circ} e^- = 11$

Rpta.: Na

4. En la siguiente reacción nuclear



Marque la alternativa que contiene la proposición o proposiciones correctas con relación al elemento E. (UNI 2002-2)

- I. Es un isótopo del átomo de nitrógeno.
- II. Es un isótopo del átomo de oxígeno.
- III. Tiene un número de masa de 17.

Datos: NA(C=6; N=7; O=8; F=9)

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) y III
- E) II y III

Resolución

- I. Incorrecta:

$${}_{7}^{14}\text{N} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_Z^A\text{E} + {}_1^1\text{p} \quad \left. \begin{array}{l} 14 + 4 = A + 1 \Rightarrow A = 17 \\ 7 + 2 = Z + 1 \Rightarrow Z = 8 \end{array} \right\}$$

Se trata del elemento ${}_{8}^{17}\text{E}$.

- II. Correcta:

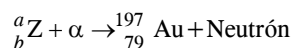
${}_8\text{O}$ y ${}_{8}^{17}\text{E}$ son isótopos ($=Z$).

- III. Correcta:

$${}_{8}^{17}\text{E} \Rightarrow A = 17$$

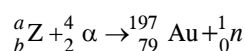
Rpta.: II y III

5. Un isótopo ${}_b^a\text{Z}$ es bombardeado con partículas α originándose la reacción



¿Cuál es el valor de $a+b$? (UNI 1996-2)

Resolución



$$a + 4 = 197 + 1 \quad \dots(1)$$

$$b + 2 = 79 + 0 \quad \dots(2)$$

$$a + b + 6 = 277$$

$$a + b = 271$$

Rpta.: 271



Helicopráctica

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- El núcleo atómico es de alta densidad. ()
- La masa del protón depende del tipo átomo donde se encuentra. ()
- La nube electrónica concentra la masa de un átomo. ()
- Para un elemento, su catión tiene masa ligeramente mayor que su anión. ()

Resolución

2. Para los núclidos se afirma:

- Los isóbaros poseen la misma cantidad de neutrones y tienen masas iguales.
- Los isótopos pertenecen a elementos diferentes y tienen el mismo número de neutrones.
- Los isótopos tienen la misma carga nuclear, pero diferente número de neutrones.

¿Cuáles son verdaderas?

Resolución

3. Marque la respuesta correcta sobre los núclidos.

- A) El catión divalante del Fe-58 tiene más protones que el catión divalente Fe-56.
- B) Los isótopos de un elemento tienen el mismo número de masa.
- C) Los isótopos Fe-57 y Fe-58 tienen el mismo número de neutrones y el mismo número de electrones.
- D) El catión trivalente del Cl-35 es de mayor masa que el anión $^{35}_{17}\text{Cl}^{1-}$.
- E) El núclido $^{81}_{35}\text{Br}$ tiene 116 partículas subatómicas fundamentales.

Resolución

4. El número de masa de un átomo es 48 y el número de neutrones excede en 4 al número de electrones de su catión divalente. Determine la carga negativa, en coulomb, presente en el átomo neutro.

Dato: $1 e^- = -1,6 \times 10^{-19}$ coulomb

Resolución

Nivel II

5. El átomo de calcio ($Z=20$) tiene 20 neutrones. Si la masa del átomo es la suma de las masas de los protones y neutrones, aproximadamente; determine la masa de 1000 átomos de calcio, aproximadamente en gramos.

Datos:

Masa del protón $= 1,672 \times 10^{-24}$ g

Masa del neutrón $= 1,675 \times 10^{-24}$ g

Resolución

6. Tres elementos E^{4+} , Q^{2+} , M^{3-} tienen en conjunto un total de 152 electrones. Si el elemento E se convierte en anión divalente, el elemento Q se convierte en anión trivalente y el elemento M se convierte en catión monovalente; ¿cuál es el nuevo número de electrones de los elementos en conjunto?

Resolución

7. El catión trivalente y el anión divalente de dos elementos tiene igual número de electrones y la suma de sus protones es 75.

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- El catión tiene número atómico 35. ()
- La carga nuclear del anión es 40. ()
- Si el catión tiene 45 neutrones, su número de masa es 85. ()

Resolución

8. El catión divalente de un átomo E tiene igual número de electrones que el catión trivalente de M ($Z=35$), así mismo E es isótono con el átomo R-70 ($Z=31$). Calcule el número de masa y el número de electrones de E^{4+} .

Resolución

Nivel III

9. Con respecto a las especies químicas $^{55}_{24}\text{Cr}^{3+}$ y $^{108}_{47}\text{Ag}^{+}$, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- El Cr^{3+} tiene 76 partículas subatómicas fundamentales. ()
- En 10 átomos de plata existen 610 neutrones. ()
- El catión de plata tiene 48 electrones. ()
- El catión tiene 108 nucleones. ()
- El núcleo del catión trivalente del cromo presenta 31 partículas fundamentales neutras. ()

Resolución

10. Indique qué afirmaciones son correctas.

- I. Las especies $^{23}_{11}\text{Na}^{+}$ y $^{19}_{9}\text{F}^{+}$ tiene el mismo número de electrones, por lo tanto son isótopos.
- II. El catión divalente del isótopo $^{14}_6\text{C}$ tiene 4 protones y 8 neutrones.
- III. El ion bromuro ($^{81}_{35}\text{Br}^{-}$) tiene 36 electrones y 81 nucleones.

Resolución

11. El uranio-238 ($Z=92$) se convierte en Ra-226 ($Z=88$) por medio de sucesiones sucesivas de rayos α y β . Calcule el número de emisiones α y el número de emisiones β necesarias para dicha transmisión nuclear.

Resolución

12. El Th-232 ($Z=90$) es bombardeado con 2 neutrones, produciendo un nuevo elemento junto a la emisión de 1 partícula α y una partícula positrónica y radiación gamma. Calcule el número de neutrones del nuevo elemento producido en dicho proceso nuclear.

Resolución



Helicotaller

Nivel I

1. Con respecto a la descripción del átomo, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
- Los neutrones y protones presentes en el núcleo concentran casi toda masa del átomo. ()
 - Las únicas partículas del núcleo son protones y neutrones. ()
 - La nube electrónica es la zona densa del átomo. ()

Resolución

2. Con respecto a los núclidos, marque la alternativa correcta.

- Los isótopos son átomos de diferentes elementos, con el mismo número atómico (Z).
- El anión trivalente del fósforo ($Z=15$) tiene la carga de $-4,6 \times 10^{-18} \text{ C}$ en la nube electrónica.
- Los isótopos Cl-35 y Cl-37 presentan las mismas propiedades físicas.
- El catión trivalente de Fe ($Z=26$) se formó por la pérdida de 3 electrones.
- La masa del electrón de oxígeno es mayor que la masa del electrón de hidrógeno.

Resolución

3. Un átomo tiene 35 nucleones neutros y el número de masa de su catión monovalente excede en 4 unidades al doble de su número atómico. Determine, en coulomb, su carga nuclear si la carga de un protón es $+1,6 \times 10^{-19}$ C.

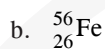
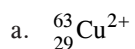
Resolución

5. Los iones J^{3+} y L^{2-} presentan igual cantidad de sus neutrones se diferencia en 4. Así mismo, el número de electrones de J^{2-} es a la carga nuclear de L^{2+} como 7 es a 6. Calcule la carga nuclear de J.

Resolución

Nivel II

4. Se tienen los siguientes núclidos:



Señale las proposiciones correctas.

- I. El número de electrones en la especie (a) es mayor que en (b).
- II. El número de neutrones de (b) es menor que en (a).
- III. El número de partículas subatómicas fundamentales de (a) es menor que en (b).

Resolución

6. El anión divalente poliatómico denominado dicromato se forma por la unión de 2 átomos de cromo (Cr) y 7 átomos de oxígeno (O): $(\text{Cr}_2\text{O}_7)^{2-}$. Calcule el número de partículas subatómicas fundamentales en el ion dicromato sabiendo que el cromo es ${}^{52}_{24}\text{Cr}$ y el oxígeno es ${}^{16}_8\text{O}$.

Resolución

Nivel III

7. El elemento darmstadtio (Ds) presenta la siguiente notación como núclido

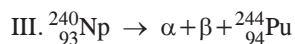
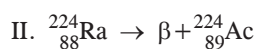
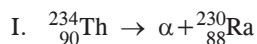


Marque lo incorrecto para la especie.

- A) Un átomo tiene 159 nucleones neutros.
 B) Su carga nuclear es $+1,76 \times 10^{-17} \text{ C}$.
 C) El catión divalente presenta 108 electrones.
 D) El número de partículas subatómicas es 379.
 E) El catión trivalente presenta 107 protones.

Resolución

8. ¿Qué proceso nuclear está diseñado incorrectamente?



Resolución



Test 1

Nivel I

1. Para la especie química ${}_{26}^{56}\text{Fe}^{2+}$.

Marque la proposición incorrecta.

- A) El número atómico del hierro es 26.
 B) En 20 átomos de hierro existen 600 neutrones.
 C) El catión del hierro contiene 28 electrones.
 D) El número de nucleones es 56 para el hierro.
 E) En 10 átomos de hierro existen 260 protones.

2. Se encuentra un átomo de un elemento metálico que presenta 84 neutrones y la diferencia de los cuadrados del número de masa y número atómico es 17136. Indique la identidad del elemento.

- A) Pm (Z=61) B) Nd (Z=60)
 C) In (Z=49) D) Eu (Z=63)
 E) Ce (Z=58)

Nivel II

3. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- Los isótopos de un elemento artificial son estables. ()
 ➤ El isótopo de un elemento con menor número de masa, generalmente es más abundante. ()

- Todos los elementos poseen isótopos naturales. ()

- Los isótopos poseen propiedades físicas similares. ()

- A) VFFF B) FVVV C) FFVV
 D) FVVF E) FVFF

4. La carga nuclear absoluta de un átomo es $5,6 \times 10^{-18} \text{ C}$ y su número de neutrones excede en 8 unidades al número de electrones de un anión monovalente. Calcule el número de masa de dicho átomo.

- A) 62 B) 76 C) 84
 D) 80 E) 79

Nivel III

5. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- El ion ${}_{26}^{56}\text{Fe}^{2+}$ tiene 28 electrones y 30 neutrones. ()

- El núclido C-14 tiene 14 nucleones y 26 protones. ()

- El ion ${}_{13}^{27}\text{Al}^{3+}$ tiene más neutrones que el ion ${}_{8}^{17}\text{O}^{2-}$. ()

- A) VFV B) FFF C) FFV
 D) VFF E) FVF



Test 2

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- El número atómico (que se identifica con la letra Z, por el término alemán *zahl*), indica la cantidad de protones presentes en el núcleo de un átomo o un ion. ()
- El número de masa (A) expresa la suma de los neutrones y protones que un átomo o ion presenta en su núcleo. ()
- Si un átomo presenta diez protones y once neutrones, entonces el núcleo de dicho átomo contiene diez electrones. ()

- A) FFF B) FFV C) FVV
D) VVV E) VVF

2. Se tienen las siguientes especies atómicas:



Señale las proposiciones correctas.

- I. El número de electrones de la especie (a) es mayor que la especie (b).
II. El número de neutrones de (b) es menor que de (a).
III. El número de partículas subatómicas fundamentales de (a) es menor que (b).

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I, II y III

Nivel II

3. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- El átomo está formado por el núcleo atómico y una nube electrónica, donde se encuentran los orbitales atómicos. ()
- Alrededor del 99,9 % de la masa de un átomo se encuentra concentrada en su núcleo atómico. ()
- El volumen del átomo está determinado por el número atómico. ()

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) VVF

4. El elemento zinc ($Z=30$) en la naturaleza tiene 5 isótopos, el más ligero tiene 34 neutrones, mientras que el isótopo más pesado tiene 40 neutrones. Marque la alternativa que contenga la notación de estos núclidos, respectivamente.

- A) ${}^{34}_{30}\text{Zn}$; ${}^{40}_{30}\text{Zn}$ B) ${}^{64}_{30}\text{Zn}$; ${}^{70}_{30}\text{Zn}$
C) ${}^{64}_{30}\text{Zn}$; ${}^{40}_{30}\text{Zn}$ D) ${}^{64}_{34}\text{Zn}$; ${}^{70}_{40}\text{Zn}$
E) ${}^{30}_{64}\text{Zn}$; ${}^{30}_{70}\text{Zn}$

Nivel III

5. Respecto a los isótopos de un mismo elemento, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.

- Poseen el mismo número atómico, pero diferentes números de neutrones. ()
- Los núcleos de los isótopos están rodeados por nubes electrónicas idénticas y presentan por tanto, propiedades químicas similares. ()
- Presentan propiedades físicas diferentes, como por ejemplo la velocidad de difusión de sus compuestos a través de una pared porosa. ()

- A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) VFV



Helicodesafío

- Respecto al ion ${}_{15}^{31}\text{P}^{3-}$, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda y luego marque la alternativa correcta.
 - El átomo contiene 15 protones en su núcleo. ()
 - La carga negativa total es de $2,88 \times 10^{-18} \text{ C}$. ()
 - El núcleo del ion ${}_{15}^{31}\text{P}^{3-}$ contiene 15 protones y 16 neutrones. ()
- La diferencia de cuadrados entre el número de masa y el número atómico de un núclido es 7000. Calcule el número de neutrones que contiene el núcleo atómico, sabiendo que su número de nucleones es 95.

A) 45 B) 50 C) 60
D) 85 E) 95
- Respecto al catión ${}_{24}^{55}\text{Cr}^{3+}$, se puede afirmar lo siguiente:
 - Su carga nuclear es $3,84 \times 10^{-18} \text{ C}$. ()
 - El número de protones del núclido es mayor que su número de neutrones. ()
 - El núcleo de ${}_{24}^{55}\text{Cr}^{3+}$ contiene 31 neutrones, 24 protones y 21 electrones. ()

Dato: $1 p^+ = +1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

A) VFV B) FVF C) F F V
D) VVF E) FVV
- La suma de los números de masa de dos átomos es 200, mientras que sus neutrones suman 139. Si el anión trivalente de uno y el catión divalente del otro tienen igual número de electrones, calcule el número atómico mayor de los átomos mencionados.

A) 28 B) 33 C) 44
D) 51 E) 66
- Se puede considerar, en forma aproximada, que la masa de un átomo es la suma de las masas de todos los protones y neutrones que posee en su núcleo. Si la masa de un átomo X es igual a $6,696 \times 10^{-23} \text{ g}$ y el número de protones es igual al número de neutrones, indique la notación de X.

Datos:
Masa de protón = $1,673 \times 10^{-24} \text{ g}$
Masa de neutrón = $1,675 \times 10^{-24} \text{ g}$

A) ${}_{20}^{20}\text{X}$ B) ${}_{20}^{40}\text{X}$ C) ${}_{19}^{21}\text{X}$
D) ${}_{22}^{22}\text{X}$ E) ${}_{19}^{38}\text{X}$



Bibliografía y cibergrafía

Capítulos 1, 2, 3 y 4

- BROWN, Theodore y otros. *Química, la ciencia central*. Pearson Educación. 12.^a edición. México.
- CHANG, Raymond; GOLDSBY, Kenneth. *Química*. MacGraw Hill Education. 11.^a edición. México, 2013.
- JARA BENITES, Carlos; CUEVA GARCÍA, Rubén. *Problemas de química y cómo resolverlos*. Racso editores. 1.^a edición. Perú.
- JARA BENITES, Carlos. *Química, materia y energía*. J. B. Ediciones. 1.^a edición. Perú.
- MC MURRY, Jhon E.; FAY, Robert C. *Química general*. Pearson Educación. 5.^a edición. México.
- PETRUCCI, Ralph H. *Química general*. Pearson Educación. 10.^a edición. España.
- PIERCE, James B. *Química de la materia*. Publicaciones cultural S.A. 1.^a edición. México, 1973.
- WHITTEN, Ken; DAVIS, Ray. *Química*. Cengage Learning. 10.^a edición. México.
- CEPRE UNI. *Química*. Ediciones Cepre UNI. 2.^a edición. Lima, 2004.
- JARA B, Carlos; AGUILAR LOA Gustavo; CUEVA GARCÍA, Rubén; ALPISTE ALBILDO, Elmer. *Química, colección Nova de la teoría a la práctica*. Racso editores. 1.a edición. Perú.
- JARA BENITES, Carlos. *Teoría y modelos atómicos*. 1.a edición. Racso editores. Perú
- PAJARES, Elmo; RAMIREZ Sergio; GARAYAR Mario. *Química general, teoría y problemas*. Grap-Perú. 2.^a Edición. Lima, 1997.
- JARA BENITES, Carlos. *Estructura atómica*. J. B. Ediciones. 1.^{ra} edición. Perú.
- KARAPETIENTAS M. J., DRAKIN S. I. *Estructura de la sustancia*. Editorial MIR. 1.^{ra} edición. Moscú. 1974.